

آموزش صفر تا صد آمار و احتمال

تابع چگالی احتمال

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

مثلاً :

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X ، دارای تابع چگالی $f(x) = kx^2$; $-1 < x < 4$ و مقدار k و $P(-1 < X < 1)$

$$\int_{-1}^4 kx^2 dx = k \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^4 = \frac{k}{3} (64 + 1) = 1 \rightarrow k = \frac{3}{65}$$

$$P(-1 < x < 1) = \int_{-1}^1 \frac{3}{65} \cdot x^2 dx = \frac{3}{65} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1$$

$$\text{جواب} = \frac{1}{65} (1 + 1) = \frac{2}{65}$$

تابع چگالی احتمال به صورت $f(x) = \begin{cases} k(16x - x^3) & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$ داده شده است. عدد k کدام است؟

$$\int_0^4 k(16x - x^3) dx = 1 \rightarrow k \left(1x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^4 = 1$$

$$k(128 - 64) = 1$$

$$k = \frac{1}{64}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $P(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2x+k) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{جا های دیگر} \end{cases}$ داده شده است. با تعیین k مقدار $P(0 \leq X < \frac{1}{2})$

$$\int_0^1 \frac{1}{3}(2x+k) dx = 1 \rightarrow \frac{1}{3} (x^2 + kx) \Big|_0^1 = 1$$

$$\frac{1}{3}(1+k) = 1 \rightarrow 1+k=3 \rightarrow k=2$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}(2x+2) dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

اگر کمیت تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ باشد، دهک هشتم توزیع کدام است؟

$$\int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,1 \rightarrow -e^{-\lambda x} \Big|_0^a = 0,1$$

$$-e^{-\lambda a} + 1 = 0,1 \rightarrow e^{-\lambda a} = 0,9 \rightarrow -\lambda a = \ln 0,9$$

$$\lambda a = -\ln 0,9 = \ln 0,9^{-1} = \ln \lambda \rightarrow a = \frac{1}{\lambda} \ln \lambda$$

$$1 = \frac{1}{\lambda} \ln \lambda$$

دهک هفتم برای توزیع $f(x) = \mu e^{-\mu x}$; $x > 0$ را محاسبه کنید؟

$$\int_0^a \mu e^{-\mu x} dx = 0,1 \rightarrow -e^{-\mu x} \Big|_0^a = 0,1$$

$$-e^{-\mu a} + 1 = 0,1 \rightarrow e^{-\mu a} = 0,9 \rightarrow -\mu a = \ln 0,9$$

$$\mu a = -\ln 0,9 = \ln 0,9^{-1} = \ln \frac{10}{9} \rightarrow a = \frac{1}{\mu} \ln \frac{10}{9}$$

$$D = \frac{1}{\mu} \ln \frac{10}{9}$$

ALIGEBRA.COM

•۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-•۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

تابع زیر مفروض است، مقدار a را چنان بیابید که $f(x)$ یک چگالی احتمال باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} a + \frac{1}{4}x & -2 \leq x \leq 0 \\ a - \frac{1}{4}x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^0 (a + \frac{1}{4}x) dx + \int_0^2 (a - \frac{1}{4}x) dx = 1$$

$$(ax + \frac{1}{8}x^2) \Big|_{-2}^0 + (ax - \frac{1}{8}x^2) \Big|_0^2 = 1$$

$$(0 - (-2a + \frac{1}{2})) + (2a - \frac{1}{2}) = 1 \rightarrow 2a - 1 = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

مقدار m در تابع $f(x) = \frac{m}{\sqrt{x}}$ برای $0 \leq x \leq 1$ چقدر باشد تا $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال باشد؟

$$\int_0^1 \frac{m}{\sqrt{x}} dx = 1 \quad \rightarrow \quad m \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 1$$

$$m \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2m \sqrt{x} \Big|_0^1 = 2m = 1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی به صورت $f(x) = \begin{cases} ae^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ است. a کدام است؟

$$\int_0^{+\infty} a e^{-\lambda x} dx = 1 \rightarrow a \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} \right) = 1$$

$$\frac{-a}{\lambda} \left(e^{-\infty} - e^0 \right) = \frac{-a}{\lambda} \left(0 - 1 \right) = \frac{a}{\lambda} = 1$$

$a = \lambda$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت روبرو است:

$$P(2 \leq X \leq 6) \text{ مقدار } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{4} & 1 < x < 5 \\ f(x) = 0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

$$P(2 \leq x \leq 6) = \int_2^5 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_2^5$$

$$\text{جواب} = \frac{1}{4} (5 - 2) = \frac{3}{4} = 0.75$$

اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X به صورت $1 < x < 4$; $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(4x - x^2) & ; \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$ باشد، $P(X > 2)$ کدام است؟

$$\int_2^4 \frac{1}{9} (4x - x^2) dx = \frac{1}{9} \left(4x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4$$

$$\frac{1}{9} \left[\left(4 \times 16 - \frac{4^3}{3} \right) - \left(4 \times 4 - \frac{4^3}{3} \right) \right]$$

$\Big|_2^4$

$$= \frac{14}{27}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت Algebra.com است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.