

آموزش ریاضی

فاکتوریل، ترتیب و ترکیب

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت Algebra.com است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ALIGEBRA.COM

$$\omega! = \omega \times \cancel{\omega} \times \cancel{\omega} \times \dots \times 1 = 1\omega \quad \checkmark$$

$$\frac{\omega!}{\mu!} = \frac{\omega \times \cancel{\omega} \times \dots \times \mu!}{\mu!} = 1\omega \quad \checkmark$$

$$\frac{\lambda!}{\psi! \gamma!} = \frac{\cancel{\lambda} \times \cancel{\lambda} \times \dots \times \psi!}{\cancel{\psi!} \times \cancel{\gamma}} = \gamma\lambda \quad \checkmark$$

sub: $0! = 1 \quad \checkmark$

$$1! = 1 \quad \checkmark$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{\underline{r!} (n-r)!}$$

$$P(5, 2) = \frac{5!}{3!} = 20$$

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

دیند
مطلوب

دیند - مطلوب

$$1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{0}{0} = \binom{0}{0} = 1$$

$$2) \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{0}{1} = \binom{0}{r} = 0$$

$$3) \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)}{r}$$

$$\binom{0}{r} = \frac{0 \times r}{r} = 0$$

$$4) \binom{10}{y} = \binom{10}{r}$$

$$\binom{r}{r} = \binom{r}{r}$$

A, B, C, D, E

زیر مجموعہ:

$$2^n = 2^5 = 32 \checkmark$$

۱۔ کل زیر مجموعہ

$$\binom{5}{3} = 10 \checkmark$$

۲۔ زیر مجموعہ جس سے عضو

$$\binom{4}{3} = 4 \checkmark$$

۳۔ زیر مجموعہ جس سے عضو A ناکند

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \checkmark$$

۴۔ زیر مجموعہ جس سے عضو A شامل

۱- از ۱۲ نفر دانش آموز نمونه، به چند راه می توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه، انتخاب کرد؟

$$P(12, 3) = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

$$\frac{12}{1} \times \frac{11}{1} \times \frac{10}{1} = 1320$$

۲- به چند طریق می توان ۶ عدد اسباب بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

$$\binom{9}{2} = x \binom{7}{2} = x \binom{5}{2}$$

$$\frac{9 \times 8}{2} \times \frac{7 \times 6}{2} \times 1 = 10 \times 9 \times 1 = 90$$

۳- مقدار n در عبارت $\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{3}{2}$ کدام است؟

$$\frac{n \cancel{(n-1)!} \cdot \cancel{(n-3)!}}{(n-2) \cancel{(n-3)!} \cancel{(n-1)!}} = \frac{\mu}{2} \rightarrow \frac{n}{n-2} = \frac{\mu}{2}$$

$$\rightarrow \mu_{n-2} = \mu_n \rightarrow n=2$$

۴- از بین ۹ کارمند می‌خواهیم ۵ نفر را برای اعزام به خارج انتخاب کنیم. اگر ۳ فرد به خصوص از قبل برای اعزام انتخاب شده باشند، چند حالت مختلف برای این کار وجود دارد؟

$$\binom{9}{5} \xrightarrow{\text{شرط}} \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

۵- حاصل عبارت $\frac{۶! + ۵!}{۴!}$ کدام است؟

$$\frac{۶!}{۴!} + \frac{۵!}{۴!} = \frac{۶ \times ۵ \times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}} + \frac{۵ \times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}$$

$$= ۶ + ۵ = ۱۱$$

۶- مجموعه‌ای دارای ۲۸ زیرمجموعه دو عضوی است. این مجموعه چند زیرمجموعه چهار عضوی دارد؟

$$\binom{n}{2} = 11 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 11 \rightarrow n(n-1) = \underline{22}$$

$$\rightarrow \underline{n(n-1)} = \underline{1 \times 22} \rightarrow n = 1 \quad \checkmark$$

$$\binom{1}{2} = \frac{1!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \times 22 \times 1 \times 22 \times 1!}{2 \times 2 \times 2 \times 2!} = 0$$

۷- از تساوی $P(n, \underline{n-2}) = 12$ مقدار n کدام است؟

$$\frac{n!}{(n-n+2)!} = 12 \rightarrow \frac{n!}{2} = 12 \rightarrow n! = 24$$

$$\underline{\underline{n!}} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \underline{\underline{4!}} \rightarrow n = 4$$

۸- در یک جعبه ۵ مهره سیاه و ۴ مهره سفید داریم. تعداد حالت‌هایی که ۳ مهره با هم انتخاب شود به طوری که ۲ مهره سیاه و یک مهره سفید باشد، چند تا است؟

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = \frac{5 \times 4}{2} \times 4 = 10 \times 4 = 40$$

۹- از بین ۴ دانش آموز کلاس اول و ۲ دانش آموز کلاس دوم و ۵ دانش آموز کلاس سوم، به چند طریق می توان سه نفر را انتخاب نمود به طوری که در این انتخاب، دانش آموزی از کلاس دوم وجود نداشته باشد؟

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{3 \times 2 \times \cancel{6!}} = 14$$

۱۰- مقدار x در تساوی $6 = (\frac{2x}{3} - 3)!$ کدام است؟

$$\left(\frac{2x}{3} - 3\right)! = 2 \times 1 = 2!$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{2x}{3} - 3 &= 2 & \rightarrow \frac{2x}{3} &= 5 & \rightarrow 2x &= 15 \end{aligned}$$

$$x = 7.5$$

۱۱- معادله $(x - ۲)! = \frac{\sqrt{۲۵}}{۵}$ چند جواب دارد؟

$$(x - ۲)! = 1$$

$$\begin{aligned} ۰! &= 1 \\ 1! &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - ۲ = ۰ \\ x - ۲ = 1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = ۲ \checkmark \\ x = ۳ \checkmark \end{cases} \end{aligned}$$

۱۲- اگر $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ باشد A چند زیرمجموعه دو عضوی دارد که شامل ۷ نباشد؟

$$\binom{5}{2} \xrightarrow{\text{فاقد 7}} \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \quad \checkmark$$

علی‌حاصل: سه عضوی - شامل ۳ و فاقد ۱

$$\binom{5}{3} \xrightarrow{\text{شامل ۳}} \binom{4}{2} \xrightarrow{\text{فاقد A}} \binom{3}{2} = 3 \quad \checkmark$$

۱۳- از بین ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۴ کتاب فیزیک متفاوت، می‌خواهیم ۳ کتاب انتخاب کنیم به طوری که حداقل یک کتاب ریاضی انتخاب شود، چند حالت ممکن است؟

$$\begin{array}{l} \text{۵ ریاضی} \\ \hline \text{۴ فیزیک} \end{array} \quad r = 3$$

$$\binom{5}{1} \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \binom{4}{1} + \binom{5}{3} \binom{4}{0}$$

$$= 5 \times 6 + 10 \times 4 + 10 \times 1 = 10$$

۱۴- به چند طریق می‌توان، ۶ کارمند جدید را در اتاق‌های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟

$$\binom{6}{\mu} \times \binom{\mu}{\nu} \times \binom{\nu}{1}$$

$$\frac{6!}{\mu! \nu!} \times \mu \times 1 = \frac{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3}!}{\cancel{\mu} \times \cancel{\nu} \times \cancel{\nu}!} \times \mu = 1 \times \mu = \mu$$

۱۵- در یک کیسه ۳ مهره آبی، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه قرار دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد به طوری که حداقل دو مهره سیاه باشد؟

$$\begin{aligned} \uparrow \text{ سیاه} &= 3 \\ \uparrow \text{ قرمز} &= 4 \end{aligned}$$

$$\binom{3}{2} \binom{4}{1} + \binom{3}{3} \binom{4}{0}$$

$$= 3 \times 4 + 1 \times 1 = 12 + 1 = 13$$

۱۶- معادله‌ی $! = 1 = (5x^2 - 4x)!$ دارای چند جواب است؟

$$5x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(5x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$5x^2 - 4x = 1 \rightarrow \underline{5x^2 - 4x - 1} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

جواب: $\left\{ 0, \frac{4}{5}, 1, \frac{-1}{5} \right\}$

۱۷- از بین ۶ دانش آموز انسانی و ۵ دانش آموز تجربی به چند طریق می توان یک تیم شش نفره انتخاب کرد اگر حداقل

۴ نفر انسانی باشند؟

$$۶ = \text{انسانی}$$

$$۵ = \text{تجربی}$$

$$\binom{6}{4} \binom{5}{2} + \binom{6}{5} \binom{5}{1} + \binom{6}{6} \binom{5}{0}$$

$$= 15 \times 10 + 6 \times 5 + 1 \times 1 = 111$$

۱۸- به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ دانش‌آموز پایه دهم و ۷ دانش‌آموز پایه یازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم، به طوری که حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز یازدهم باشند؟

$$\begin{aligned} \binom{7}{4} &= 35 \\ \binom{6}{2} &= 15 \end{aligned}$$

$$\binom{7}{4} \binom{6}{2} + \binom{7}{5} \binom{6}{1} + \binom{7}{6} \binom{6}{0}$$

$$= 35 \times 15 + 21 \times 6 + 7 \times 1 = 951$$

۱۹- اگر $\binom{n}{2} = P(n-3, 2) + 8$ باشد، حاصل عبارت $\binom{n}{5}$ کدام می تواند باشد؟

۶۴ (۴)

۳۶ (۳)

۵۶ (۲) ✓

۵ (۱)

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-3)!}{(n-5)!} + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} + 1$$

$$\rightarrow \frac{n^2 - n}{2} = n^2 - 7n + 12 + 1 \quad \rightarrow \quad n^2 - 13n + 10 = 0$$

$$(n-1)(n-10) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n=1 \\ n=10 \end{cases}$$

$$\binom{1}{5} = 0 \quad / \quad \binom{10}{5} = 1$$

۲۰- در یک کیسه ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی موجود است به چند طریق می توان سه مهره از کیسه خارج کرد به طوری که حداقل دو مهره قرمز باشد؟

۵ قرمز
۳ آبی

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{5}{3} \times \binom{3}{0}$$

$$= 10 \times 3 + 10 \times 1 = 40$$

شاد و موفق باشید

WWW.ALIGEBRA.COM



Freemath



Alihashemi_math