

کنکور ریاضی ۱۴۰۱

پاسخنامه درس ریاضی

علی هاشمی

۱۰۱- دنباله‌های هندسی با قدر نسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این

نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ باشد؟



۶(۳)

۴(۲)

۳(۱)

✓ ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶

✓ ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲

✓ ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸

✓ ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴

✓ ۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, ۸۰

✓ ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶

✓ ۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱

۱۰۲ - کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

$x = 2/5$ (۴)

$x = 2$ (۳)

$x = 2/5$ (۲)

$x = 2$ (۱)

$$\frac{-\Delta}{2a} = 2 \rightarrow \frac{-(-12) - \sqrt{144 - 4m(5m-1)}}{2m} = 2$$

$$\rightarrow 5m^2 - m - 24 = 2m \rightarrow 5m^2 - 3m - 24 = 0$$

$$\rightarrow 5m^2 - 3m - 24 = 0 \rightarrow (5m - 15)(m + 12) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -12/5 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{4} = 3$$

۱۰۳- مجموعه‌های A, B, C و D را در نظر بگیرید. تعداد اعضای C، دو واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D، سه واحد کمتر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعه C×B، ۲۵٪ بیشتر از تعداد اعضای مجموعه A×B و ۱/۵ برابر تعداد اعضای مجموعه A×D باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چقدر است؟

- ۲ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵ (۵)

$$C = A + 2$$

$$D = B - 3$$

~~$$C \times B = 1/5 A \times B$$~~
~~$$C \times B = 1/5 A \times D$$~~

$$\rightarrow A + 2 = 1/5 A \rightarrow A = 1$$

$$C = 10$$

$$\rightarrow 10 \cdot B = 1/5 \times 1 (B - 3) \rightarrow B = 11$$

۱۰۴- اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $A' \cup ((B \cap A) \cap ((B \cup A) \cap B))$ با کدام

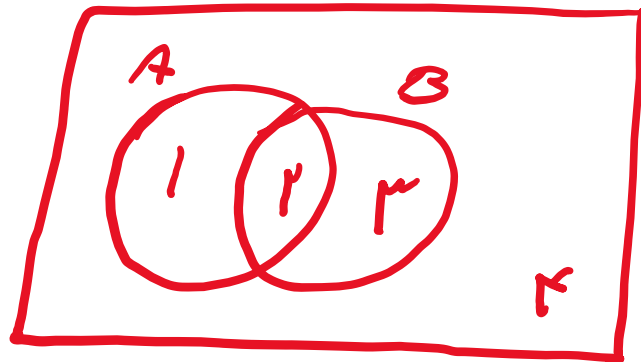
\emptyset (۴)

B (۳)

$B - A$ (۲)

$(A - B)'$ (۱)

مجموعه برابر است با



$$(۳, ۴) \cup \left[\underbrace{۲ \cap ۱, ۲, ۳ \cap ۲, ۳}_{۲} \right] = ۲, ۳, ۴$$

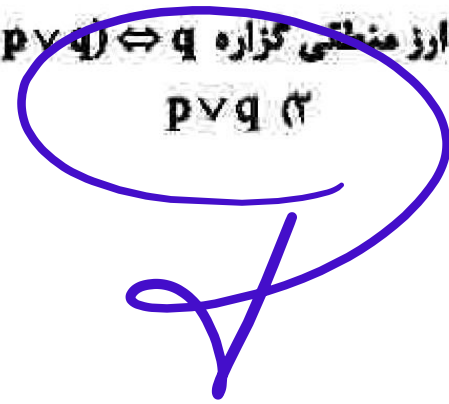
۱۰۵- کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$ است؟

۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

۳) q

۲) $p \vee q$

۱) p



p	q	$\sim p \vee q$	جواب:
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

۱۰۶- α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 9x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $2\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد مقدار a چقدر است؟

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4a}}{2} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{9}{2} - \sqrt{9 - a} \rightarrow \alpha^2 = \frac{81}{4} - 9\sqrt{9 - a} + 9 - a \\ \beta = -\frac{9}{2} + \sqrt{9 - a} \rightarrow \beta^2 = \frac{81}{4} - 9\sqrt{9 - a} + 9 - a \end{cases}$$

$$90 - 18a + 18\sqrt{9 - a} = 12\sqrt{2} + 18$$

$$a = 1$$

$$a^r = t$$

چقدر است؟ $\left(\frac{1}{a^r - \sqrt{a^r + 1}} + \frac{1}{a^r + \sqrt{a^r + 1}} \right)^{1/2}$ باشد حاصل $\frac{1}{a^r + 1} + \frac{1}{a^r - 1} = 2$ اگر $-1 < r < 1$

$$\frac{t-1+t+1}{(t+1)(t-1)} = \frac{2t}{t^2-1} = 2 \rightarrow t^{-1} = t \rightarrow t = t+1$$

$$\frac{1}{t+1-\sqrt{t}} + \frac{1}{t+1+\sqrt{t}} = \frac{2t+2}{(t+1)^2-t} = \frac{2t+2}{t^2+2t+1-t}$$

$$= \frac{2t+2}{t+1+t+1} = 1 \rightarrow 1 = 1$$

$$f = x^2 \cdot |x|$$

۱۰۸- تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ✓ ✓ $-\sqrt{x}, x \geq 0$ (۴)
- ~~$-\sqrt{x^2}, x \geq 0$ (۳)~~
- ~~$-\sqrt{x}, x \leq 0$ (۲)~~
- ~~$-\sqrt{x^2}, x \leq 0$ (۱)~~

پیدا اصلی

$$x \geq 0 \rightarrow f = x$$

$$x \leq 0 \rightarrow f = -x^3 \rightarrow y = -x^3 \rightarrow x = -\sqrt[3]{y} \rightarrow f^{-1} = -\sqrt[3]{x}$$



۱۰۹- فاصله نقطه A روی خط $x+y=8$ از دو نقطه $B(-3, 2)$ و $C(-1, 2)$ به ترتیب برابر $\sqrt{29}$ و 5 است. مقدار $\frac{1}{x}$ چقدر است؟

A
|
x
|
y

$$-2 \text{ (۴)}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۱)}$$

✓✓

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 29 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 29$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25 \rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

$$x + 1 + y - 4 = 4$$

$$\rightarrow x + y = 7$$

۱۱- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x - \sqrt{x}}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (A)}$$

$$2 \text{ (B)}$$

$$\sqrt{2} \text{ (C)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (D)}$$

$$1) f(\sqrt{2}) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2) f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}$$

$$3) f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۱۱- فرض کنید $5^x = 10$ است. اگر $2^f(x) = 20$ باشد، ضابطه f کدام است؟

$$\frac{x+1}{2x+1} \quad (1)$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \quad (2)$$

$$\frac{x-1}{2x-1} \quad (3)$$

$$\frac{2x+1}{x+1} \quad (4)$$

$$\left(\frac{10}{5}\right)^f = \frac{100}{5} \rightarrow \frac{10^f}{5^f} = \frac{100}{5} \rightarrow \frac{10^f}{100} = \frac{5^f}{5} \rightarrow 10^{f-2} = 5^{f-1}$$

$$10 = 5^{\frac{f-1}{f-2}} \rightarrow 5^x = 5^{\frac{f-1}{f-2}} \rightarrow x = \frac{f-1}{f-2}$$

$$x^f - 2x = f - 1 \rightarrow f = \frac{2x-1}{x-1}$$

۱۱۱ - فرض کنید $5^x = 10$ است. اگر $2^f(x) = 20$ باشد، ضابطه f کدام است؟

$$\frac{x+1}{2x+1} \quad (1)$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \quad (2)$$

$$\frac{x-1}{2x-1} \quad (3)$$

$$\frac{2x+1}{x+1} \quad (4)$$

$$x = \log_5 10 = 1 + \log_5 2 \rightarrow \log_5 2 = x - 1$$

$$f = \log_2 10 = \frac{\log_5 10}{\log_5 2} = \frac{\log_5 10}{\log_5 2} + 1 = \frac{2x-1}{x-1}$$

۱۱۲- اندازه زاویه A در مثلث ABC، درجه بیشتر از اندازه زاویه B است، حاصل $2\cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

$$\underline{\underline{A-B = 45}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (F)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (G)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (H)}$$

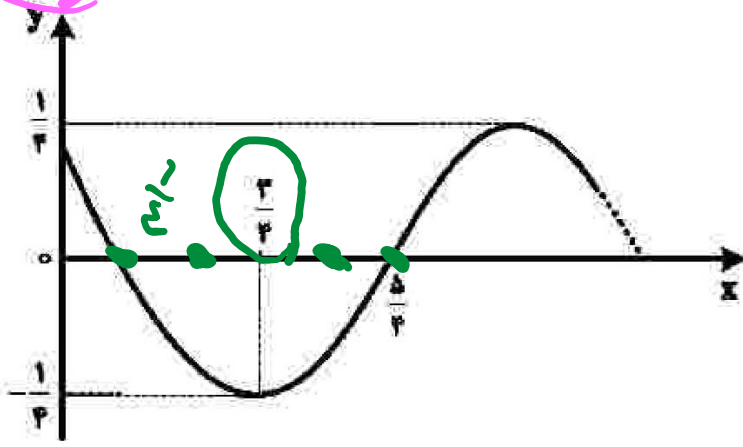
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (I)}$$

$$2\cos A \sin B - \sin(\underline{\underline{180-C}}) = 2\cos A \sin B - \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$= \cos A \sin B - \sin A \cos B = -\sin(A-B)$$

۱۱۳- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟

- $\frac{1}{16}$
- $1/2$
- $\frac{1}{4\pi}$
- $\pi/4$



$a = \frac{1}{4}$

$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{16}$

$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \pi$

$\frac{2\pi}{b} = \pi \rightarrow b = 2$

$\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = 0 \rightarrow c = \frac{\pi}{2}$

۱۱۴- مجموع جوابهای معادله مثلثاتی $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟

$\sin \frac{\pi}{6}$ $\cos \frac{\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6}$ $\frac{9\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3}$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{9\pi}{12}$$

۱۱۵ - حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{x}}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (A)

۲ (B)

$-\frac{1}{2}$ (C)

$\lim_{x \rightarrow -1}$
 $\lim_{x \rightarrow -1}$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2x+3}} - \frac{2}{\sqrt{2x+2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -\frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+3}}$$

۱۱۶- تابع $f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & |x^2| < x^2 \\ 1 + \cos \pi x & |x^2| = x^2 \\ [x^2] - [x] & |x^2| > x^2 \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۲ (۲)

(۳) در همه نقاط پیوسته است.

۲ (۱)

(۳) بیشمار

$|x^3| > x^2 \rightarrow 2, 3, 4, 5, \dots$

۱۱۷- چند جمله‌ای $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^2 + 2x^4 + 16a$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش پذیر است.

برای $n=1$ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x - 2$ کدام است؟

$$-5x + 44 \quad (4)$$

$$-5x + 24 \quad (1)$$

$$-15x + 14 \quad (2)$$

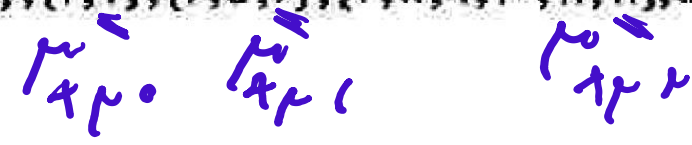
$$-15x + 24 \quad (1)$$

$$P(-1) = 0 \rightarrow (-1)^{2n+1} + 2(-1)^{2n} + 4a - 9 + 16a = 0 \rightarrow a = 2$$

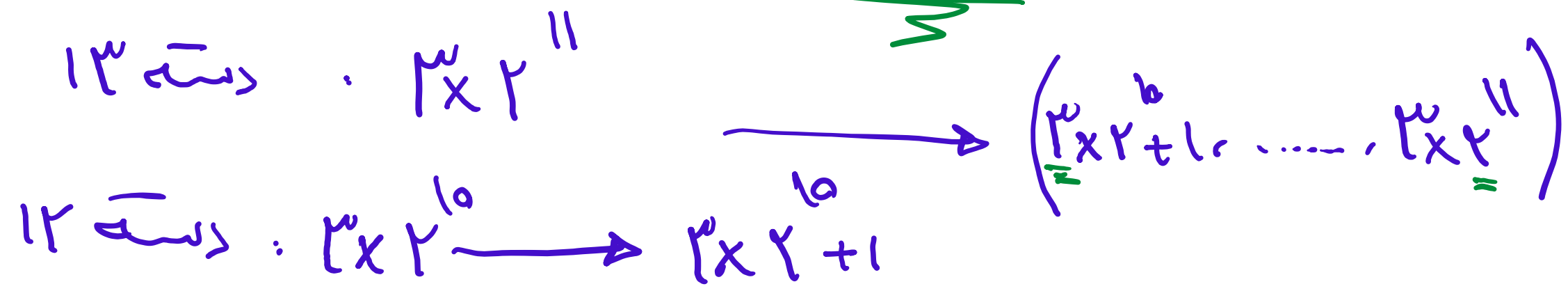
$$x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -2$$

$$P(1) = 1 + 2 + 1 + 2 + 16 = 19$$

۱۱۸- اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (بجز دسته اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی ... $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$. میانگین عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟



۲۳۰۴,۵ (۱) ۳۰۷۲,۵ (۲) ۴۶۰۸,۵ (۳) ۶۱۴۴,۵ (۴)



$$\bar{x} = \frac{2^{10} \left(\binom{13}{1+9} + 1 \right)}{13} = \sum_{i=1}^5 9i$$

-119 تابع $f(x) = \frac{|ax+1|+2x}{|x|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای تابع

در بی نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

$$x = \pm b$$

$$y = |a| \pm 2$$

$$\frac{1}{4} (4)$$

$$-\frac{1}{2} (2)$$

$$1 (1)$$

$$-2 (1)$$

$$a=0$$

$$b=-2$$

$$f = \frac{2x+1}{|x|-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = \frac{3}{-1} = -3$$

۱۲۰- در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = \sin x + \frac{1}{4} \cos x$ و $g(x) = \frac{3}{4} \sin x$ در بازه $[0, \pi]$ خط مماسی بر منحنی

$f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$\sin x = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad y = \frac{13\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} - 3 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{4} - 1 \quad (1)$$

$$f' = \cos x - \frac{1}{4} \sin x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} m = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$y - \frac{13\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{y=0} -\frac{13\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 13$$

۱۲۱- تابع f مشتق پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{3}{2}$ و $g(x) = f(x+1) + f(3x+10)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

۱۰-۱

$$\frac{13}{2} (f)$$

~~۶ (f)~~

$$\frac{7}{2} (f)$$

۳ (۱)

$$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10) \rightarrow g'(-2) = f'(-1) + 3f'(\underline{\underline{5}})$$

$$\rightarrow g'(-2) = 5f'(-1) = 5 \times \frac{3}{2} = 9$$

۱۲۲- اگر $f(x) = (x-2)\sqrt{x+3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a-h) - 2f'(a-h) + 2}{h(a-h)}$ کدام است؟

$\frac{12}{15}$ (۴)

$\frac{5}{6}$ (۳)

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{12}{30}$ (۱)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2f'(a-h) \cdot f'(a-h) + 2f'(a-h)}{a-2h} = \frac{1}{a} [-2f'(a)f'(a) + 2f'(a)]$$

$$f(a) = 1 \quad f'(x) = 1x\sqrt{x+3} + \frac{1}{\sqrt{(x+3)^3}} (x-2) \rightarrow f'(5) = \frac{25}{12}$$

$$\text{جواب} = \frac{1}{5} \left[-2 \times 2 \times \frac{25}{12} + 2 \times \frac{25}{12} \right] = \frac{-5}{4}$$

۱۲۳- نقطه $A(-1, 1)$ اکسترمم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \text{ (A)}$$

$$2 \text{ (B)}$$

$$-\frac{1}{3} \text{ (C)}$$

$$-2 \text{ (D)}$$

$$\begin{aligned} & \text{Substituting } x = -1, y = 1 \text{ into } y = x^2|x| + 3ax^2 + b \\ & 1 = (-1)^2|-1| + 3a(-1)^2 + b \\ & 1 = 1 + 3a + b \end{aligned}$$

$$3a + b = 0$$

$$b = -3a$$

$$\frac{b}{a} = -3$$

۱۲۴- محل تلاقی مجانبهای تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$ ، نقطه مینیمم تابع $y = \frac{2}{3}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است. نمودار

این تابع هموگرافیک، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$\frac{2}{3} \checkmark \checkmark$$

$$\frac{2}{3} \checkmark$$

$$-3 \checkmark$$

$$3 \checkmark$$

$$y' = 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} = \frac{-(a-1)}{a+1} \rightarrow a = 2$$

$$y = \frac{2x+3}{2x+1} \xrightarrow{y=0} x = -\frac{3}{2}$$

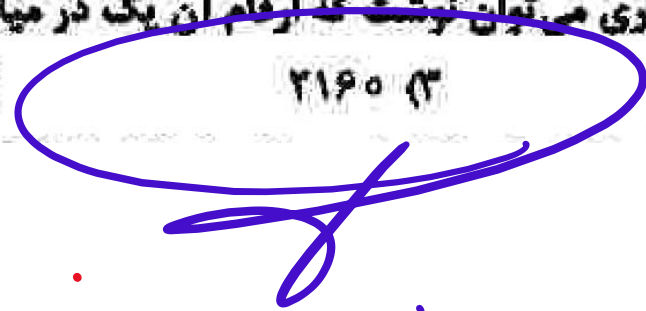
۱۲۵- چند عدد طبیعی پنج رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟

۲۴۰۰ (۴)

۲۱۶۰ (۳)

۱۹۲۰ (۲)

۱۸۴۰ (۱)



$$\frac{\overset{\cdot}{۵}}{۵} \frac{\overset{\cdot}{۴}}{۴} \frac{\overset{\cdot}{۳}}{۳} \frac{\overset{\cdot}{۲}}{۲} \frac{\overset{\cdot}{۱}}{۱} = ۱۲۰۰$$

+

$$\frac{\overset{\cdot}{۴}}{۴} \frac{\overset{\cdot}{۳}}{۳} \frac{\overset{\cdot}{۲}}{۲} \frac{\overset{\cdot}{۱}}{۱} \frac{\overset{\cdot}{۵}}{۵} = ۹۶۰$$

سایت علی جبرا
Algebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱