

تست فصل ۱ فیزیک دوازدهم - حرکت شناسی Aligebra.com

گزینه ۱

۱

در لحظه‌های t_0 ، t_2 و t_3 چون خط مماس افقی است پس تندی صفر است. اما در لحظه t_1 شیب مثبت و تندی از لحظه‌های دیگر بیشتر است.

گزینه ۱

۲

تندی در لحظه $t = 12\text{ s}$ برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان است. پس:

$$v_{t=12\text{ s}} = \frac{240}{12-4} = \frac{240}{8} = 30\text{ m/s}$$

اگر مکان متحرک در $t = 14\text{ (s)}$ را $x_{14\text{ s}}$ در نظر بگیریم، تندی متوسط متحرک در بازه $(2\text{ s}, 14\text{ s})$ برابر است با:

$$S_{av(2\text{ s}, 14\text{ s})} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{x_{14\text{ s}} - 60}{14 - 2}$$

باتوجه به صورت تست، $S_{av(2\text{ s}, 14\text{ s})} = v_{t=12\text{ s}}$ است، پس:

$$\frac{x_{14\text{ s}} - 60}{14 - 2} = 30 \Rightarrow x_{14\text{ s}} = 420\text{ m}$$

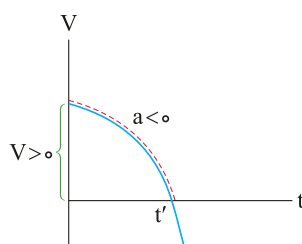
حالا نسبت خواسته شده را به دست می آوریم. دو ثانیه اول یعنی $(0, 2\text{ s})$ و دو ثانیه هفتم یعنی $(12\text{ s}, 14\text{ s})$ ، پس:

$$\frac{v_{av(0, 2\text{ s})}}{v_{av(12\text{ s}, 14\text{ s})}} = \frac{\frac{x_{2\text{ s}} - x_0}{2 - 0}}{\frac{x_{14\text{ s}} - x_{12\text{ s}}}{14 - 12}} = \frac{x_{2\text{ s}} - x_0}{x_{14\text{ s}} - x_{12\text{ s}}} = \frac{60 - 0}{420 - 240} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳

۳

در بازه $(0, t')$ نمودار بالای محور زمان است پس $v > 0$ است. شیب مماس بر نمودار سرعت-زمان برابر شتاب متحرک است. در بازه $(0, t')$ شیب مماس بر نمودار منفی است. پس شتاب در این بازه منفی است.



گزینه ۴

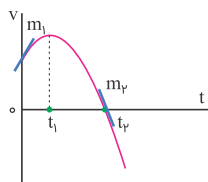
۴

علت نادرستی گزینه‌های دیگر را بررسی می کنیم:

(۱) در بازه زمانی صفر تا t_1 تندی در حال افزایش است.

(۲) شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ نشان دهنده شتاب متحرک است. بزرگی شیب خط مماس در لحظه t_2 ، بیشتر از بزرگی شیب خط مماس در لحظه t_1 است.

(۳) قبل از لحظه t_1 شتاب در جهت محور x است چون شیب خط مماس مثبت است و پس از لحظه t_1 شتاب در خلاف جهت محور x است چون شیب خط مماس منفی است.



گزینه ۱

۵

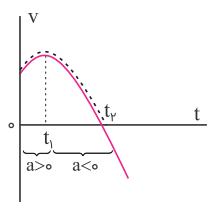
به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:

الف) نادرست؛ در لحظه t_1 تنها جهت شتاب تغییر می‌کند و سرعت همچنان مثبت و در جهت محور باقی می‌ماند.

ب) درست؛ در این بازه سرعت مثبت است یعنی حرکت متحرک در جهت محور است.

پ) نادرست؛ در این بازه تندی (اندازه سرعت) در حال افزایش است.

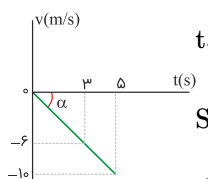
ت) نادرست؛ شتاب برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است. باتوجه به شیب خط مماس، در بازه $(0, t_1)$ شتاب مثبت و در بازه (t_1, t_2) شیب خط مماس منفی است.



گزینه ۳

۶

سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر مسافت پیموده شده است. کافی است سرعت متحرک را در لحظه $t = 5 \text{ s}$ بیابیم.



$$\tan \alpha = \frac{6}{3} = \frac{v}{5} \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

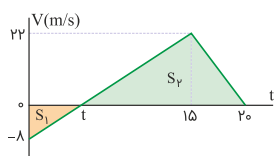
$$S = \frac{5 \times 10}{2} = 25 \text{ m}$$

نکته: چون متحرک تغییر جهت نداده بنابراین جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شده باهم برابرند؛ لذا مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر مسافت پیموده شده و همچنین جابه‌جایی متحرک است.

گزینه ۴

۷

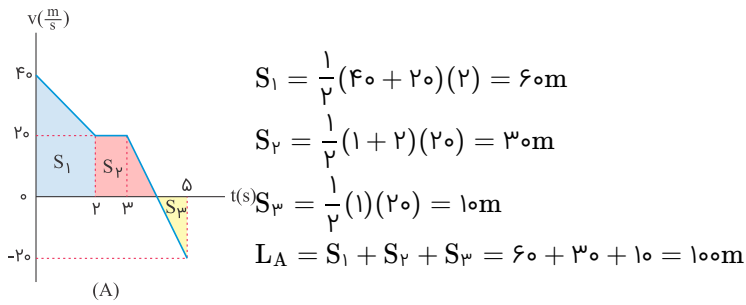
سطوح محصور بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان برابر مسافت طی‌شده است.



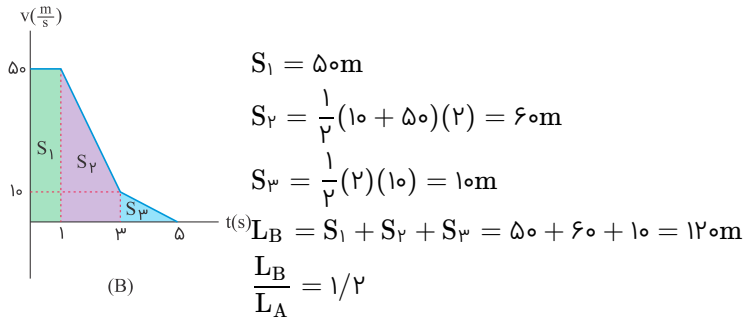
$$\text{طبق تشابه: } \frac{t}{4} = \frac{16-t}{22} \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

$$\ell = S_1 + S_2 = \left(\frac{4 \times 16}{2} \right) + \left(\frac{16 \times 22}{2} \right) = 16 + 176 \Rightarrow \ell = 192 \text{ m}$$

قدر مطلق مساحت زیر نمودار سرعت - زمان بیانگر مسافت طی شده است.
مسافت طی شده A:



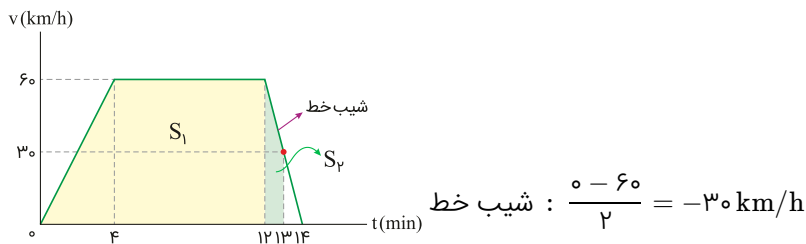
مسافت طی شده B:



برای محاسبه مسافت طی شده توسط متحرک در نمودار سرعت-زمان، باید مساحت زیر نمودار را محاسبه کنیم. در این مسئله، سرعت بر حسب کیلومتر بر ساعت (km/h) و زمان بر حسب دقیقه (min) است، بنابراین باید واحد زمان را به ساعت تبدیل کنیم تا مسافت بر حسب کیلومتر به دست آید.

مسافت کل طی شده در ۱۳ دقیقه را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد:
مسافت طی شده در ۱۲ دقیقه اول (S_1):

$$S_1 = \frac{(\frac{12}{60} \text{ h} + \frac{1}{60} \text{ h}) \times 60 \text{ km/h}}{2} = \frac{\frac{13}{60} \text{ h} \times 60 \text{ km/h}}{2} = 10 \text{ km}$$



مسافت طی شده در دقیقه سیزدهم (S_2):
شیب خط در بازه زمانی ۱۲ تا ۱۴ دقیقه را محاسبه می‌کنیم:

یعنی در هر دقیقه، ۳۰ کیلومتر بر ساعت از سرعت کم می‌شود.

$$S_2 = \frac{(60 + 30) \times \frac{1}{60}}{2} = \frac{\frac{9}{60}}{2} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ km}$$

$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 = 10 + 0.75 = 10.75 \text{ km}$$

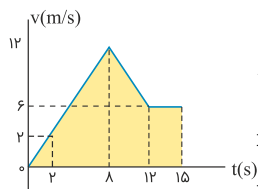
شتاب در بازه زمانی (۰, ۸) ثابت و برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(8) - v(0)}{8 - 0} = \frac{12 - 0}{8 - 0} = \frac{3}{2} \text{ m/s}^2$$

در لحظه $t = 2 \text{ s}$ سرعت را به دست می آوریم:

$$v(2) = at + v_0 \Rightarrow v = \frac{3}{2} \times 2 + 0 = 3 \text{ m/s}$$

حال به کمک سطح زیر نمودار سرعت- زمان جابه جایی را در بازه زمانی (۲, ۱۵) محاسبه می کنیم:

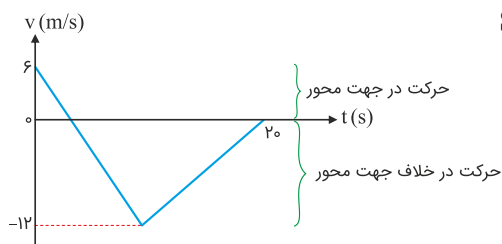


$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_2 - (-6) = S$$

$$x_2 + 6 = \left(\frac{(12+3)6}{2} + \frac{(12+6)4}{2} + (3 \times 6) \right)$$

$$x_2 + 6 = 99 \Rightarrow x_2 = 93$$

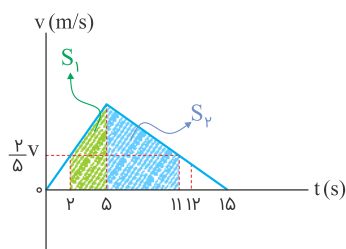
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_{(v-t)}}{\Delta t} = \frac{\frac{v_{\max} \times 25}{2}}{25} = \frac{v_{\max}}{2} = 10 \Rightarrow v_{\max} = 20 \text{ m/s}$$



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\Delta t} = \frac{\text{مساحت مثلث پایین}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 12 \times (20 - t)}{20 - t} = 6 \text{ m/s}$$

با رسم نمودار سرعت- زمان مربوط به حرکت جسم می‌توان نوشت:



$$\frac{v_2}{v_5} = \frac{2}{5} \Rightarrow v_2 = \frac{2}{5}v$$

$$\frac{v_{11}}{v_5} = \frac{15-11}{15-5} \Rightarrow v_{11} = \frac{2}{5}v$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$v_2 = v_{11} = \frac{2}{5}v$$

باتوجه به جابه‌جایی انجام شده بین دو لحظه $t_1 = 2$ s تا $t_2 = 11$ s داریم:

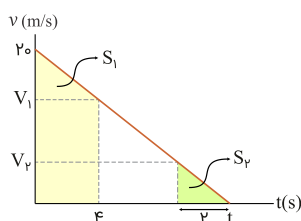
$$S_1 + S_2 = 126 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}v + v\right) \times \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{5}v + v\right) \times \left(\frac{11-5}{2}\right) = 126$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5}v \left(\frac{3}{2} + 3\right) = 126 \Rightarrow 6/3 v = 126 \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$

برای محاسبهٔ تندی در لحظهٔ $t = 12$ s داریم:

$$\frac{v_{12}}{v_5} = \frac{15-12}{15-5} \Rightarrow v_{12} = \frac{3}{10}v = \frac{3}{10} \times 20 = 6 \text{ m/s}$$

شتاب حرکت که با شیب خط نمودار سرعت- زمان برابر است، ثابت است. پس می‌توان نوشت:



$$\frac{v_0 - v_1}{4} = \frac{v_2}{12} \Rightarrow 2v_2 = v_0 - v_1 \quad (1)$$

ازطرفی باتوجه به رابطهٔ بین مسافت‌های داده شده می‌توان نوشت:

$$S_1 = 3S_2 \Rightarrow \left(\frac{v_0 + v_1}{2}\right)4 = 3\left(\frac{v_2 \times 12}{2}\right) \Rightarrow 18v_2 = v_0 + v_1 \quad (2)$$

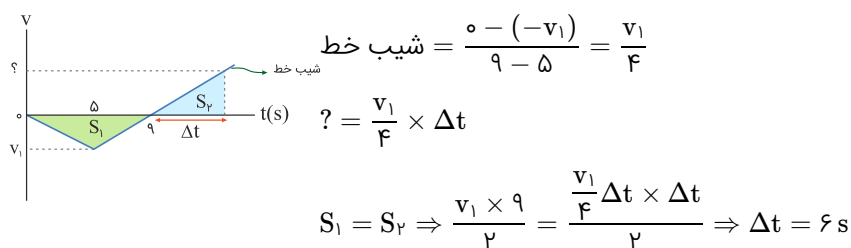
از رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$20v_2 = 40 \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s}$$

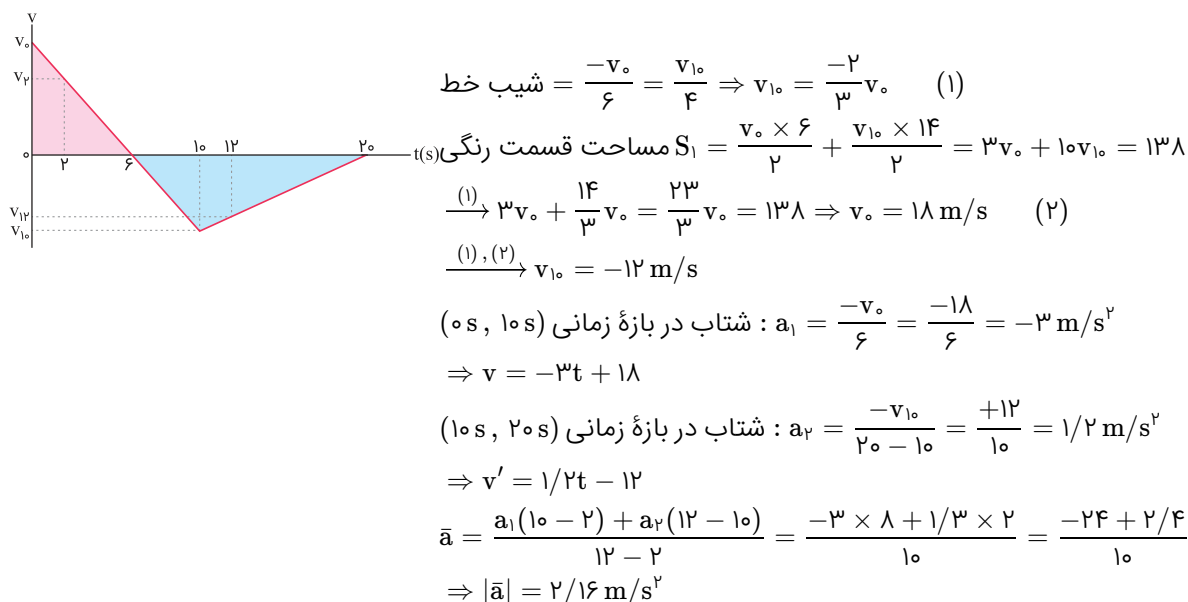
در این صورت شتاب حرکت برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_2}{12} \Rightarrow a = -1 \text{ m/s}^2$$

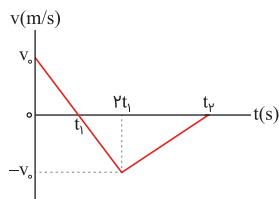
چون متحرک از $x = 0$ شروع به حرکت کرده است و مجدداً می‌خواهد به $x = 0$ برسد، جابه‌جایی متحرک باید صفر باشد. جابه‌جایی در نمودار $(v - t)$ برابر با مجموع جبری مساحت‌های زیر نمودار $(v - t)$ است؛ بنابراین مساحت سطح پایین محور t باید با مساحت بالای محور t برابر باشد. اگر لحظهٔ برابری این دو مساحت را t در نظر بگیریم، داریم:



$$t = 9 + \Delta t = 9 + 6 = 15 \text{ s}$$



از لحظه شروع حرکت تا لحظه $۲t_1$ ، شتاب حرکت ثابت است. در این صورت مقادیر سرعت در ابتدای حرکت و لحظه $۲t_1$ برابر است.



در این صورت می‌توان نوشت:

$$a_{1(0-2t_1)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-v_0 - v_0}{2t_1} = \frac{-2v_0}{2t_1} = -\frac{v_0}{t_1}$$

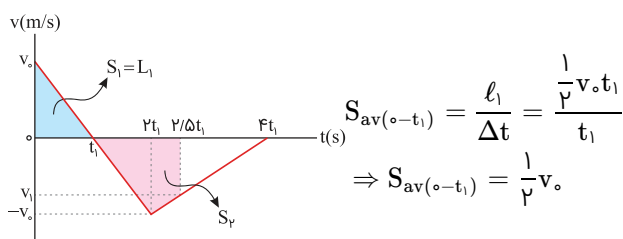
$$a_{2(t_2-2t_1)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-v_0)}{t_2 - 2t_1} = \frac{v_0}{t_2 - 2t_1}$$

با استفاده از شرط سؤال داریم:

$$|a_1| = ۲a_2 \Rightarrow \frac{v_0}{t_1} = ۲ \frac{v_0}{t_2 - 2t_1} \Rightarrow t_2 - 2t_1 = 2t_1$$

$$\Rightarrow t_2 = 4t_1$$

برای محاسبه تندی متوسط در بازه‌های زمانی خواسته شده می‌توان نوشت:



$$S_{av(0-t_1)} = \frac{\ell_1}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{۲} v_0 t_1}{t_1}$$

$$\Rightarrow S_{av(0-t_1)} = \frac{1}{۲} v_0$$

برای تعیین تندی متوسط در بازه زمانی t_1 تا $۲/۵ t_1$ ابتدا سرعت v_1 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{-v_0} = \frac{4t_1 - ۲/۵ t_1}{4t_1 - 2t_1} \Rightarrow v_1 = -\frac{۳}{۴} v_0 \text{ (شتاب در این بازه زمانی ثابت است)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S'_{av(t_1-۲/۵ t_1)} = \frac{(\frac{v_0 \times t_1}{۲}) + (\frac{v_0 + \frac{۳}{۴} v_0}{۲} \times ۰/۵ t_1)}{۲/۵ t_1 - t_1}$$

$$\Rightarrow S'_{av} = \frac{۵}{۸} v_0$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{av}}{S'_{av}} = \frac{\frac{v_0}{۲}}{\frac{۵}{۸} v_0} = \frac{۴}{۵}$$

برای پیدا کردن لحظه‌هایی که مکان متحرک $\vec{x} = (۱۳۶\text{m})\vec{i}$ است، ابتدا باید جابجایی لازم را محاسبه کنیم: مکان اولیه ۱۰m و مکان نهایی ۱۳۶m جابجایی لازم برابر است با:

$$\Delta x = ۱۳۶ - ۱۰ = ۱۲۶\text{m}$$

جابجایی متحرک برابر با مساحت زیر نمودار سرعت- زمان است. باید لحظه یا لحظه‌هایی را پیدا کنیم که مساحت زیر نمودار از $t = ۰$ تا آن لحظه برابر با ۱۲۶ متر شود.

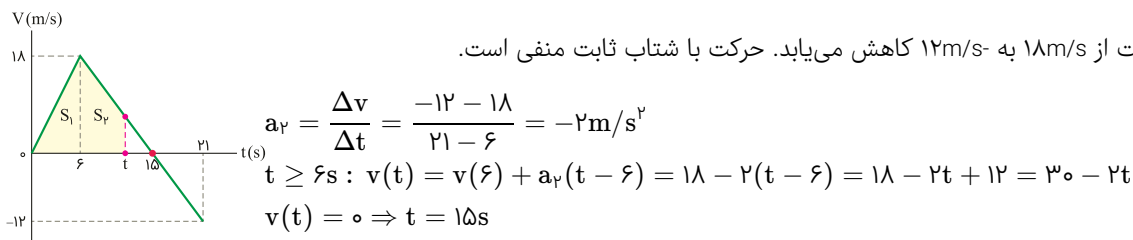
نمودار سرعت- زمان از دو بخش خطی تشکیل شده است:

۱. بازه ۰ تا ۶ ثانیه: سرعت از ۰ به ۱۸m/s افزایش می‌یابد. حرکت با شتاب ثابت مثبت است. جابجایی در این بازه (مساحت مثلث):

$$S_1 = \frac{۶ \times ۱۸}{۲} = ۵۴\text{m}$$

چون جابجایی لازم ۱۲۶ (متر) بیشتر از جابجایی در ۶ ثانیه اول (۵۴ متر) است، لحظه مورد نظر حتماً بعد از $t = ۶\text{s}$ خواهد بود.

۲. بازه ۶ تا ۲۱ ثانیه: سرعت از ۱۸m/s به -۱۲m/s کاهش می‌یابد. حرکت با شتاب ثابت منفی است.



حالا باید مساحت را در بازه دوم محاسبه کنیم تا به جابجایی کل ۱۲۶ متر برسیم. جابجایی مورد نیاز در بازه دوم (از $t = ۶$ به بعد):

$$\Delta x = ۱۲۶ - S_1 = ۱۲۶ - ۵۴ = ۷۲\text{m}$$

مساحت زیر نمودار از $t = ۶$ تا $t = ۱۵$ (مثلث بالای محور زمان):

$$S' = \frac{۹ \times ۱۸}{۲} = ۸۱\text{m}$$

جابجایی کل تا $t = ۱۵\text{s}$:

$$\Delta x_t = S_1 + S' = ۵۴ + ۸۱ = ۱۳۵\text{m}$$

چون جابجایی لازم ۱۲۶ (متر) کمتر از جابجایی تا $t = ۱۵\text{s}$ (۱۳۵ متر) است، اولین لحظه مورد نظر (t_1) بین ۶ و ۱۵ ثانیه قرار دارد. و چون جابجایی بعد از $t = ۱۵\text{s}$ منفی می‌شود (سرعت منفی است)، جابجایی کل دوباره کاهش می‌یابد و ممکن است دوباره به ۱۲۶ متر برسد. پس لحظه دومی (t_2) نیز وجود دارد که بزرگتر از ۱۵ ثانیه است. پیدا کردن t_1 (بین ۶ و ۱۵): جابجایی از $t = ۶$ تا t_1 باید برابر ۷۲ متر باشد. این مساحت یک دوزنقه است.

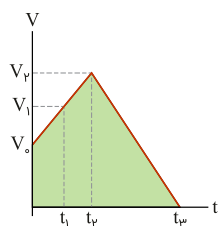
$$S_2 = \frac{1}{2}(v(۶) + v(t_1)) \times (t_1 - ۶) \Rightarrow ۱۲۶ - ۵۴ = \frac{1}{2}(۱۸ + (۳۰ - ۲t_1)) \times (t_1 - ۶)$$

$$\Rightarrow t_1^2 - ۳۰t_1 + ۲۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱۲\text{s} \\ t = ۱۸\text{s} \end{cases}$$

چون t_1 باید بین ۶ و ۱۵ باشد، پس $t_1 = ۱۲\text{s}$. تا همین‌جا با بررسی گزینه‌ها به این نتیجه می‌رسیم که پاسخ صحیح گزینه ۲ است. بنابراین، لحظه‌هایی که مکان متحرک ۱۳۶ متر است، $t = ۱۲\text{s}$ و $t = ۱۸\text{s}$ هستند.

در بازه زمانی ۲s تا ۱۰s مسافت طی شده بیش از دو برابر مسافت طی شده در بازه زمانی ۶s تا ۱۰s است، درحالی‌که بازه زمانی آن دو برابر بازه زمانی ۶s تا ۱۰s است؛ بنابراین در بازه زمانی ۲s تا ۱۰s تندی متوسط بیشتر از بازه زمانی ۶s تا ۱۰s است. علاوه بر این برای مقایسه گزینه (۲) و (۳) بخشی از مسیر هر دو گزینه یکسان است (یعنی بازه ۲ تا ۶ ثانیه) پس کافی است بازه زمانی صفر تا ۲s را با ۶s تا ۱۰s مقایسه کنیم. باتوجه به نمودار، مسافت طی شده در بازه زمانی ۶s تا ۱۰s بیش از دو برابر مسافت طی شده در بازه زمانی صفر تا ۲s است. پس تندی متوسط در بازه زمانی ۲s تا ۱۰s بیشتر است.

باتوجه به نمودار مشخص است که جهت حرکت متحرک تغییر نمی‌کند. در این صورت تندی متوسط و سرعت متوسط در تمامی بازه‌ها باهم برابر است. در بازه زمانی ۰ تا t_2 شتاب حرکت ثابت است. پس می‌توان نوشت:



$$(0 - t_1) : v_{av,1} = \frac{v_1 + v_0}{2}$$

$$(t_1 - t_2) : v_{av,2} = \frac{v_1 + v_1}{2}$$

در بازه زمانی t_2 تا t_3 نیز شتاب حرکت ثابت است. پس می‌توان نوشت:

$$(t_2 - t_3) : v_{av,3} = \frac{v_2 + 0}{2} = \frac{v_2}{2}$$

براساس معادلات تا اینجا مشخص است که:

$$v_{av,2} > v_{av,1}, v_{av,3}$$

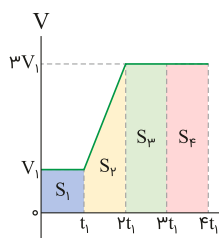
تندی متوسط در کل حرکت مقداری بین تندی متوسط در بازه زمانی $(0 - t_1)$ و $(t_2 - t_3)$ دارد یعنی:

$$v_{av,3} < v_{av,کل} < v_{av}$$

پس تندی متوسط در بازه زمانی $(t_1 - t_2)$ از تندی متوسط کل بزرگتر است:

$$v_{av,2} > v_{av,کل}$$

در نمودار سرعت- زمان، مساحت زیر نمودار بیانگر جابه‌جایی است.



$$S_1 = v_1 t_1$$

$$S_2 = \frac{(v_1 + 3v_1)t_1}{2} = 2v_1 t_1$$

$$S_3 = 3v_1 t_1$$

$$S_4 = 3v_1 t_1$$

$$\text{گزینه ۱ : } v_{av} = \frac{v_1 t_1}{t_1} = v_1$$

$$\text{گزینه ۲ : } v_{av} = \frac{v_1 t_1 + 2v_1 t_1}{2t_1} = \frac{3}{2}v_1$$

$$\text{گزینه ۳ : } v_{av} = \frac{v_1 t_1 + 2v_1 t_1 + 3v_1 t_1}{3t_1} = 2v_1$$

$$\text{گزینه ۴ : } v_{av} = \frac{v_1 t_1 + 2v_1 t_1 + 3v_1 t_1 + 3v_1 t_1}{4t_1} = \frac{9}{4}v_1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در واقع در هر بازه زمانی که مقدار سرعت در آن بیشتر باشد، سرعت متوسط بیشتری هم دارد.

روش اول: ($t_1 = 4 \text{ s}$, $x_1 = 8 \text{ m}$) باید در گزینه درست صدق کند. تنها در گزینه (۲) صدق می‌کند. پس پاسخ درست گزینه ۲ است.
روش دوم: سرعت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{26 - 8}{10 - 4} = \frac{18}{6} = 3 \text{ m/s}$$

مبادله مکان-زمان حرکت با سرعت ثابت به صورت $x = vt + x_0$ است. با جایگذاری سرعت و لحظه $t_1 = 4 \text{ s}$ و $x_1 = 8 \text{ m}$ مکان اولیه متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[t_1=4 \text{ s}]{x_1=8 \text{ m}} 8 = 3(4) + x_0 \Rightarrow x_0 = -4 \text{ m}$$

بنابراین معادله حرکت متحرک به صورت $x = 3t - 4$ در SI می‌باشد.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{10 \text{ s}} - x_0}{10 - 0} = \frac{20 - (-40)}{10} = 6 \text{ m/s}$$

$$\text{۲ ثانیه دوم} : \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \\ t_2 = 4 \text{ s} \end{cases}$$

$$v = 2t^2 - 4t - 2 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow[t_1=2 \text{ s}]{} v_1 = 2(2)^2 - 4(2) - 2 = -2 \text{ m/s} \\ \xrightarrow[t_2=4 \text{ s}]{} v_2 = 2(4)^2 - 4(4) - 2 = 14 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - (-2)}{4 - 2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}^2$$

"۲ ثانیه دوم" به بازه زمانی از $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$ اشاره دارد.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 3 \times 4 - 8 = 4 \text{ m/s} \\ v_2 &= 3 \times 16 - 8 = 40 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40 - 4}{4 - 2} = 18 \text{ m/s}^2$$

از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ داریم:

$$-4 = \frac{v_{10} - v_0}{10 - 0} \Rightarrow v_{10} - v_0 = -40 \text{ m/s} \quad (\text{I})$$

$$2 = \frac{v_{12} - v_{10}}{12 - 10} \Rightarrow v_{12} - v_{10} = 4 \text{ m/s} \quad (\text{II})$$

دو معادله (I) و (II) را باهم جمع می‌کنیم:

$$(\text{I}) + (\text{II}) = v_{12} - v_0 = 4 - 40 = -36 \text{ m/s}$$

حال شتاب متوسط در بازه زمانی ۵ s تا ۱۲ s را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{v_{12} - v_0}{12 - 0} = \frac{-36}{12} \text{ m/s}^2$$

ابتدا تغییرات سرعت را در هر بازه با استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم.

$$\Delta v_{(0,10s)} = a_{av(0,10s)} \times \Delta t = -2 \times 10 = -20 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{(0,15s)} = a_{av(0,15s)} \times \Delta t = \frac{2}{3} \times 15 = +10 \text{ m/s}$$

باتوجه به تغییرات سرعت در دو بازه به دست آمده، تغییر سرعت در بازه $(10s, 15s)$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta v_{(10s,15s)} = \Delta v_{(0,15s)} - \Delta v_{(0,10s)} \Rightarrow \Delta v_{(10s,15s)} = 10 - (-20) = +30 \text{ m/s}$$

حالا شتاب متوسط در بازه $(10s, 15s)$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(10s,15s)} = \frac{\Delta v_{(10s,15s)}}{15 - 10} = \frac{30}{5} = +6 \vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

ابتدا تغییرات سرعت در هر بازه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta v_1 = a_1 \Delta t_1 = 2 \times 15 = +30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

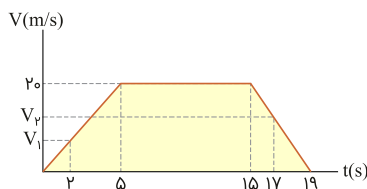
$$\Delta v_2 = a_2 \Delta t_2 = (-2) \times 5 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حالا تغییرات سرعت کل و شتاب متوسط در کل حرکت را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 30 + (-10) = +20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20}{20} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ابتدا نمودار سرعت- زمان حرکت اتومبیل را رسم می‌کنیم:



باتوجه به ثابت بودن شتاب در ۵ ثانیه اول حرکت می‌توان سرعت در لحظه $t = 2s$ را حساب کرد:

$$\frac{20}{5} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v_1 = 8 \text{ m/s}$$

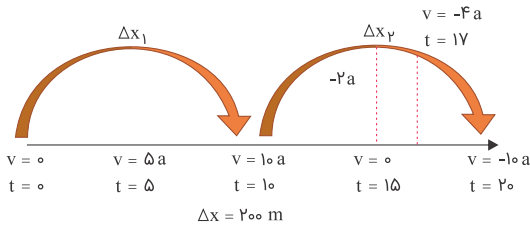
در چهار ثانیه آخر حرکت نیز شتاب ثابت است. در این صورت داریم:

$$\frac{20}{4} = \frac{v_2}{2} \Rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

در این صورت شتاب متوسط بین دو لحظه خواسته شده برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 8}{15} = \frac{2}{15} \text{ m/s}^2$$

مطابق شکل سرعت‌ها را در زمان‌های کلیدی از رابطه $v = at + v_0$ به دست می‌آوریم.



اکنون مسافت‌های طی شده در بازه‌های زمانی صفر تا $t = 10$ s و $t = 10$ s تا $t = 20$ s را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = \left(\frac{0 + 10a}{2} \right) 10 = 50a \\ \Delta x_2 = \left(\frac{10a + 0}{2} \right) 10 = 50a \end{cases}$$

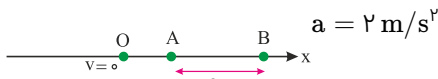
$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 100a = 200 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10a - 0}{20 - 0} = \frac{-20}{20} = -1 \text{ m/s}^2$$

کافی است برای این سؤال از معادله مستقل از شتاب در حرکت شتاب ثابت استفاده کنیم.

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow (-122/5 - 0) = \frac{v + 0}{2} \times 5 \Rightarrow v = -49 \text{ m/s}$$

در صورت سؤال بزرگی سرعت خواسته شده است و گزینه "۴" درست است.



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{a=2\text{m/s}^2, v_0=0, x_0=0} x = t^2 \Rightarrow \begin{cases} OA = t_{OA}^2 & (1) \\ OB = t_{OB}^2 \Rightarrow OA + 160 = (t_{OA} + 8)^2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \Rightarrow (2)} t_{OA}^2 + 160 = t_{OA}^2 + 16t_{OA} + 64 \Rightarrow 16t_{OA} = 96 \Rightarrow t_{OA} = 6 \text{ s}$$

$$OA = t_{OA}^2 \Rightarrow OA = 6^2 = 36 \text{ m}$$

$$18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 25 - 16 = 2a(19 - 10)$$

$$\Rightarrow 9 = 18a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x' \Rightarrow 16 - v_0^2 = 2 \times \frac{1}{2} \times (10 - (-6))$$

$$\Rightarrow 16 - 16 = v_0^2 \Rightarrow v_0 = \text{صفر}$$

ابتدا از فرمول مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{v_o + v}{2} \Delta t \Rightarrow 7\omega = \frac{v_o + 20}{2}(\omega) \Rightarrow v_o = 10 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_o \Rightarrow 20 = a(\omega) + 10 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

طبق تصاعد عددی خواهیم داشت:

$$x_7 = x_1 + at^7$$

$$\Delta x_7 = 7\omega + 2(\omega)^7 = 12\omega \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_7}{\Delta t} = \frac{12\omega}{\omega} = 12 \text{ m/s}$$

ابتدا باید معادله سرعت لحظه‌ای (v) را بیابیم:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{2}t^2 - 15t + 30 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_o t + x_o \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ m/s}^2, v_o = -15 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v = \frac{3}{2}t^2 - 15$$

محاسبه سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول: ۵ ثانیه اول به معنای بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 5 \text{ s}$ است. در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک

بازه زمانی برابر با سرعت لحظه‌ای در لحظه میانی آن بازه است. لحظه میانی برای این بازه برابر است با $t_1 = \frac{(0 + 5)}{2} = 2.5 \text{ s}$

۵ ثانیه سوم به معنای بازه زمانی $t = 10 \text{ s}$ تا $t = 15 \text{ s}$ است. لحظه میانی برای این بازه برابر است با $t_2 = \frac{(10 + 15)}{2} = 12.5 \text{ s}$

$$\Rightarrow v = \frac{3}{2}t - 15 \Rightarrow \begin{cases} v_{1,av} = \frac{3}{2} \times (2.5) - 15 = -11/2 \text{ m/s} \\ v_{2,av} = \frac{3}{2} \times 12.5 - 15 = 3/2 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{1,av}}{v_{2,av}} = \frac{-11/2}{3/2} = -\frac{11}{3}$$

ابتدا سرعت را در $t = 0$ ، $t = 1 \text{ s}$ و $t = 2 \text{ s}$ بدست می‌آوریم:

$$v = at + v_o = 3t \Rightarrow \begin{cases} v_o = 0 \\ v_1 = 3 \text{ m/s} \\ v_2 = 6 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta K_2}{\Delta K_1} = \frac{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_o^2)} = \frac{36 - 9}{9} = 3$$

اگر جابه‌جایی در ۴ ثانیه اول حرکت X_1 باشد، جابه‌جایی در ۴ ثانیه دوم $X_1 + 16a$ و جابه‌جایی در چهار ثانیه سوم $X_1 + 32a$ و جابه‌جایی در چهار ثانیه چهارم $X_1 + 48a$ است. با توجه به صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$X_1 = (X_1 + 16a) + (X_1 + 32a) + (X_1 + 48a)$$

$$\xrightarrow{X_1 = 200 \text{ m}} 200 = 600 + 96a \Rightarrow a = -\frac{400}{96} \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{400}{96} = \frac{25}{6} \text{ m/s}^2$$

جهت حرکت جسم تغییر نکرده است و حرکت تندشونده می‌باشد، در این صورت مسافت و جابه‌جایی برابر هستند. پس می‌توان نوشت:

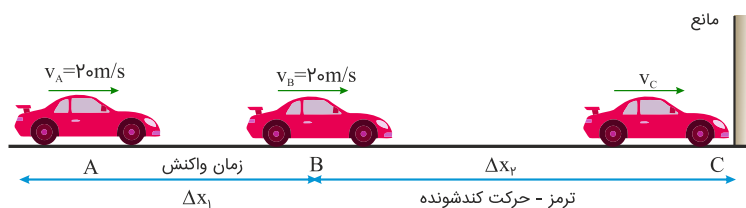
$$x_1 + (x_1 + at^2) = (x_1 + 2at^2) + 2 \Rightarrow 2x_1 + a = x_1 + 2a + 2$$

$$\Rightarrow x_1 = a + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ m}$$

با استفاده از معادله مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1^2 + v_0 \times 1$$

$$\Rightarrow v_0 + 1 = 4 \Rightarrow v_0 = 3 \text{ m/s}$$



$$\Delta x_1 = vt_1 = 20 \times 0.5 = 10 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = 52 - 10 = 42 \text{ m}$$

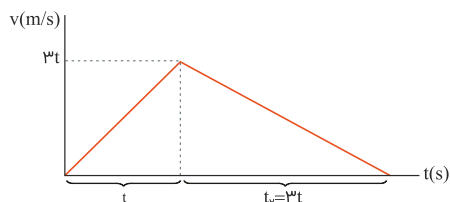
$$v_C^2 - v_B^2 = -2a(\Delta x_2) \rightarrow v_C^2 - 20^2 = -2 \times 4 \times 42$$

$$v_C^2 = -336 + 400 = 64 \Rightarrow v_C = 8 \text{ m/s}$$

گام اول: ابتدا نمودار سرعت زمان متحرک را رسم می‌کنیم. اگر مدت زمان حرکت متحرک با شتاب 3 m/s^2 برابر با t باشد، سرعت متحرک در انتهای حرکت با شتاب 3 m/s^2 ، طبق رابطه $v = at + v_0$ به $v = 3t + 0 = 3t$ می‌رسد. در مرحله دوم که حرکت با شتاب 1 m/s^2 کند می‌شود، متحرک پس از مدت Δt می‌ایستد که Δt از رابطه $v = at + v_0$ به دست می‌آید. توجه کنید که سرعت اولیه مرحله دوم، سرعت انتهای قسمت اول است و سرعت انتهای این قسمت برابر با صفر است؛ بنابراین مدت حرکت قسمت دوم حرکت برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -1 \times t_v + 3t \Rightarrow t_v = 3t$$

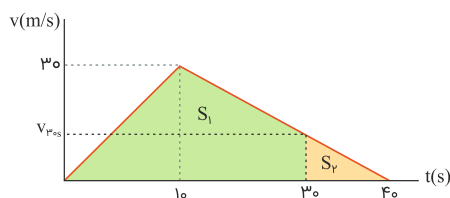
بنابراین نمودار سرعت زمان متحرک به صورت شکل زیر است:



گام دوم: مسافت طی شده توسط متحرک که همان مساحت سطح زیر نمودار است، برابر با 600 m است؛ بنابراین t برابر است با:

$$S = 600 \Rightarrow \frac{3t \times 4t}{2} = 600 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

گام سوم: برای محاسبه مسافت طی شده در $(0, 30 \text{ s})$ کافی است، مساحت سطح زیر نمودار را در این بازه به دست بیاوریم؛ یعنی S_1 .

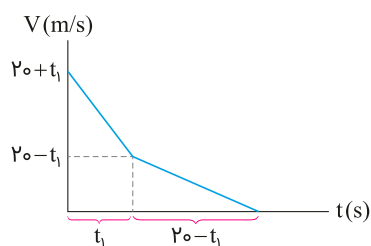


$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{در مرحله دوم}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{v_{30s} - 30}{30 - 10} \Rightarrow v_{30s} = 10 \text{ m/s}$$

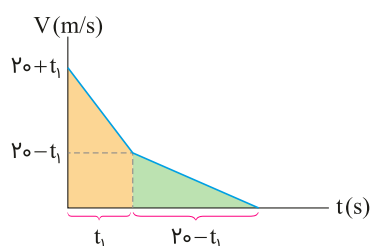
$$S_1 = S_{\text{کل}} - S_2 = \frac{30 \times 40}{2} - \frac{10 \times 10}{2} = 550 \text{ m}$$

نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم. مدت حرکت با شتاب به بزرگی 1 m/s^2 را $(v_0 - t_1)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین سرعت متحرک در لحظه‌ای که شتاب آن از 2 m/s^2 به 1 m/s^2 تغییر می‌کند برابر با $v = |a|_p t = 1 \times (v_0 - t_1)$ است. چون به مدت t_1 ثانیه با شتاب 2 m/s^2 ترمز گرفته است، پس سرعت اولیه متحرک برابر است با:



$$v_0 = a_1 t_1 + v = 2t_1 + v_0 - t_1 = v_0 + t_1$$

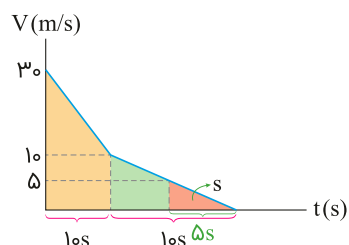
مساحت سطح زیر نمودار در t_1 ثانیه اول و $(v_0 - t_1)$ ثانیه بعدی را حساب می‌کنیم و نسبت آن‌ها را برابر ۴ قرار می‌دهیم تا t_1 به دست بیاید:



$$S_1 = 4S_2 \Rightarrow v_0 t_1 = 4 \left(\frac{(v_0 - t_1)^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow v_0 t_1 = (v_0 - t_1)^2 \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}$$

حالا مسافت ۵ ثانیه نهایی را به دست می‌آوریم:



$$\ell = S = \frac{5 \times 5}{2} = 12.5 \text{ m}$$

ابتدا باید معادله سرعت متحرک را به دست آوریم و سپس زمانی را که سرعت صفر می‌شود، پیدا کنیم. در نهایت، با جایگذاری این زمان در معادله مکان- زمان، مکان متحرک را در آن لحظه محاسبه می‌کنیم.
از مقایسه معادله مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت با معادله صورت سوال داریم:

$$\left. \begin{aligned} x &= -4t^2 + 24t - 30 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -8 \text{ m/s}^2, v_0 = 24 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = -8t + 24 \xrightarrow{v=0} t = 3 \text{ s}$$

$$\xrightarrow{t=3 \text{ s}} x = -4 \times 9 + 24 \times 3 - 30 = 6 \text{ m}$$

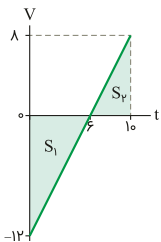
طبق معادله $x = 2t^2 + 4t - 8$ حرکت با شتاب ثابت است و چون شتاب و سرعت اولیه حرکت هم‌علامت‌اند نتیجه می‌گیریم که حرکت تندشونده بدون تغییر جهت است و در این حالت مسافت پیموده شده و جابه‌جایی باهم مساوی هستند.

$$x = 2t^2 + 4t - 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 4 \text{ m/s} \end{cases}$$

برای پیدا کردن مسافت، ابتدا باید ببینیم آیا متحرک در بازه زمانی $[0, 10]$ تغییر جهت می‌دهد یا خیر. تغییر جهت زمانی رخ می‌دهد که سرعت صفر شود. برای بدست آوردن معادله سرعت- زمان از معادله حرکت جسم مشتق می‌گیریم یا اینکه معادله مکان- زمان را با معادله حرکت جسم مقایسه می‌کنیم و شتاب و سرعت اولیه را بدست می‌آوریم سپس معادله سرعت- زمان را می‌نویسیم:

$$v = 2t - 12 \xrightarrow{v=0} t = 6 \text{ s}$$

متحرک در $t = 6 \text{ s}$ تغییر جهت می‌دهد.



اکنون سطح زیر نمودار را محاسبه می‌کنیم:

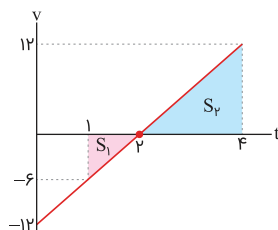
$$S = S_1 + S_2 = \left| \frac{-12 \times 6}{2} \right| + \left| \frac{8 \times 4}{2} \right| = |-36| + |16| = 52 \text{ m}$$

روش اول:

معادله سرعت- زمان را به دست می آوریم:

$$x = \underbrace{3}_{\frac{1}{2}a} t^2 - \underbrace{12}_{v_0} t + 9 \xrightarrow{v=at+v_0} v = 6t - 12$$

نمودار سرعت- زمان را رسم می کنیم و با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت را حساب می کنیم و سپس تندی متوسط را حساب می کنیم:



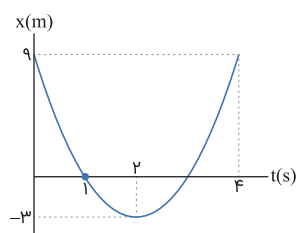
$$l = S_1 + S_2 = 3 + 12 = 15 \text{ m}$$

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{15}{4-0} = 3.75 \text{ m/s}$$

روش دوم: نمودار سهمی را رسم می کنیم و مکان متحرک در لحظات $t_1 = 1 \text{ s}$ و $t_2 = 4 \text{ s}$ را نیز تعیین می کنیم:

$$x = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow t_{\text{رأس}} = \frac{-(-12)}{2(3)} = 2 \text{ s}, \quad x_{\text{رأس}} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m}$$

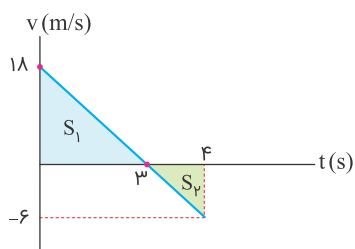
$$\begin{cases} x_{1s} = 3(1)^2 - 12(1) + 9 = 0 \\ x_{4s} = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m} \end{cases}$$



باتوجه به نمودار مسافت و تندی متوسط را حساب می کنیم.

$$l = 3 + 3 + 9 = 15 \text{ m} \Rightarrow S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ m/s}$$

ابتدا نمودار سرعت - زمان را در مدت موردنظر با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:



$$v = -6t + 18$$

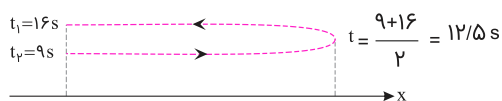
$$|S_1| = \frac{18 \times 3}{2} = 27 \text{ m}$$

$$|S_2| = \frac{6 \times 1}{2} = 3 \text{ m}$$

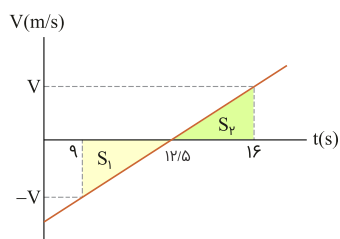
$$\ell = |S_1| + |S_2| = 27 + 3 = 30 \text{ m}$$

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ m/s}$$

جابه‌جایی بین دو لحظه $t_1 = 9 \text{ s}$ و $t_2 = 16 \text{ s}$ برابر صفر است. در این صورت مکان اولیه و نهایی جسم بین این دو لحظه برابر است. پس می‌توان لحظه تغییر جهت حرکت جسم را مشخص کرد.



با رسم نمودار سرعت- زمان مربوط به حرکت جسم مشخص بودن شتاب، می‌توان تندی حرکت در لحظه‌های $t = 9 \text{ s}$ و $t = 16 \text{ s}$ را حساب کرد.



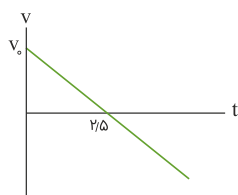
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{16 - 12.5} \Rightarrow a = \frac{v}{3.5}$$

$$\Rightarrow v = 14 \text{ m/s}$$

اکنون برای محاسبه تندی متوسط داریم:

$$\left. \begin{aligned} s_{av} &= \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t} \\ S_1 &= S_2 = \frac{14 \times 3.5}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_{av} = \frac{2 \left(\frac{14 \times 3.5}{2} \right)}{16 - 9} = 7 \text{ m/s}$$

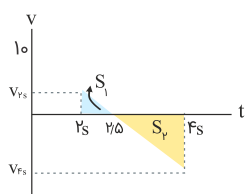
گام اول: طبق تقارنی که حرکت با شتاب ثابت نسبت به لحظه تغییر جهت دارد، اگر جابه‌جایی در یک بازه زمانی صفر باشد، سرعت در لحظه وسط آن بازه برابر با صفر است؛ بنابراین چون جابه‌جایی در ثانیه سوم حرکت صفر است، متحرک در لحظه $۲/۵$ s تغییر جهت داده است.
گام دوم: چون شتاب -۴ m/s^2 است و متحرک در لحظه $t = ۲/۵$ s تغییر جهت داده است، نمودار سرعت زمان متحرک به صورت زیر خواهد بود:



باتوجه به $a = -۴ \text{ m/s}^2$ ، v_0 برابر است با:

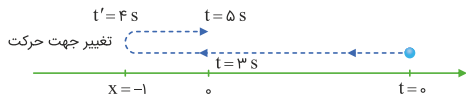
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۴ = \frac{0 - v_0}{2/5 - 0} \Rightarrow v_0 = ۱۰ \text{ m/s}$$

گام سوم: سرعت‌های متحرک در لحظات $t_1 = ۲$ s و $t_2 = ۴$ s را تعیین می‌کنیم و با استفاده از مساحت زیر نمودار، مسافت طی‌شده در بازه $(۲ \text{ s}, ۴ \text{ s})$ را به دست می‌آوریم.



$$v = at + v_0 = -۴t + ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} v_{2s} = ۲ \text{ m/s} \\ v_{4s} = -۶ \text{ m/s} \end{cases}$$

$$L = S_1 + S_2 = \frac{۲ \times ۰/۵}{۲} + \frac{۱/۵ \times ۶}{۲} = ۵ \text{ m}$$

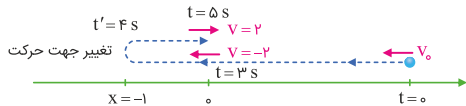


$$t' = 4s \Rightarrow t' = \frac{3+5}{2} = 4s$$

$$\Delta x_{(5s \rightarrow 4s)} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}a(1)^2 + 0 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v = at + v_0 = 2 \times 1 + 0 = 2 \text{ m/s}$$

پس سرعت در لحظه $t = 3s$ برابر با -2 m/s است. (تقارن سهمی در حرکت شتابدار با شتاب ثابت)



در نهایت به بررسی حرکت در بازه 0 تا $3s$ می‌پردازیم:

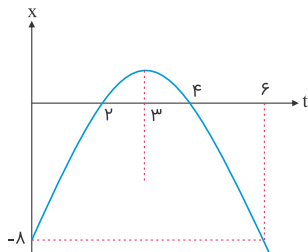
$$v = at + v_0 \Rightarrow -2 = 2(3) + v_0 \Rightarrow v_0 = -8 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \times 2 \times (3)^2 + (-8)(3) = -15 \text{ m}$$

$$\text{مسافت طی شده } \ell_{5s \rightarrow 0s} = 15 + 1 + 1 = 17 \text{ m}$$

$$\text{تندی متوسط } S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{17}{5} \text{ m/s}$$

۳ ثانیه دوم یعنی از $t = 3s$ تا $t = 6s$. با توجه به اطلاعات داده شده، نمودار مکان-زمان مطابق زیر است:



همچنین در راس سهمی داریم:

$$t_{\text{راس}} = \frac{-v_0}{a} \Rightarrow \frac{-v_0}{a} = 3 \Rightarrow v_0 = -3a$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 - 3at \xrightarrow{t=2s} 8 = \frac{1}{2}a(2)^2 - 3a(2)$$

$$\Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2, v_0 = 6 \text{ m/s}$$

سرعت در لحظه $t = 3s$ صفر و همچنین به دلیل تقارن در سهمی، تندی در لحظه $t = 6s$ برابر تندی اولیه است.

$$s_{av} = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3 \text{ m/s}$$

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازه زمانی دلخواه با سرعت در وسط آن بازه زمانی برابر است. یعنی سرعت متوسط بین دو لحظه $t_1 = ۴s$ و $t_3 = ۶s$ با سرعت در لحظه $t = ۵s$ برابر است. در این صورت داریم:

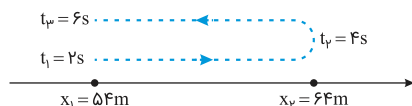
$$v_{av(۴s-۶s)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵۴ - ۶۴}{۶ - ۴} = \frac{-۱۰}{۲} = -۵ \text{ m/s}$$

$$v_{av(۴s-۶s)} = v_{t=۵s} = -۵ \text{ m/s}$$

ازطرفی سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول حرکت نیز با سرعت در لحظه $t = ۵s$ برابر است. پس داریم:

$$v_{av(۰-۱۰s)} = v_{t=۵s} = -۵ \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av(۰-۱۰s)}| = ۵ \text{ m/s}$$

روش دوم:



باتوجه به شکل مسیر حرکت جسم در لحظه $t_3 = ۴s$ ، جهت حرکت جسم تغییر کرده است. ازطرفی می‌دانیم تندی حرکت جسم در لحظه $t_1 = ۲s$ با $t_3 = ۶s$ برابر است. اکنون با استفاده از رابطه محاسبه سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av(۲-۶)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶۴ - ۵۴}{۶ - ۲} = ۵ \text{ m/s}$$

$$v_{av(۲-۶)} = \frac{v_2 + v_6}{۲} \Rightarrow ۵ = \frac{v_2 + ۰}{۲} \Rightarrow v_2 = ۱۰ \text{ m/s}$$

اکنون برای محاسبه شتاب داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - ۱۰}{۲} = -۵ \text{ m/s}^2$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$t = ۲s \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow ۱۰ = -۵(۲) + v_0 \Rightarrow v_0 = ۲۰ \text{ m/s}$$

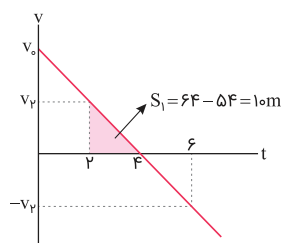
$$t = ۱۰s \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = -۵(۱۰) + ۲۰ = -۳۰ \text{ m/s}$$

پس بزرگی سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$|v_{av(۰-۱۰)}| = \left| \frac{v_{1۰} + v_0}{۲} \right| = \left| \frac{-۳۰ + ۲۰}{۲} \right| = ۵ \text{ m/s}$$

روش سوم:

با رسم نمودار سرعت-زمان و استفاده از سطح زیر نمودار خواهیم داشت:



$$S_1 = \frac{1}{2} v_4 (۲) \Rightarrow v_4 = ۱۰ \text{ m/s}$$

$$v_4 = at + v_0 \Rightarrow ۰ = ۲a + ۱۰ \Rightarrow a = -۵ \text{ m/s}^2$$

برای محاسبه سرعت اولیه حرکت با استفاده از معادله سرعت-زمان داریم:

$$v_4 = at + v_0 \Rightarrow ۰ = -۵(۴) + v_0 \Rightarrow v_0 = ۲۰ \text{ m/s}$$

برای محاسبه سرعت در لحظه $t = 10 \text{ s}$ داریم:

$$v_{10} = at + v_0 \Rightarrow v_{10} = -5(10) + 20 = -30 \text{ m/s}$$

در این صورت سرعت متوسط در 10 ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$v_{av(0-10)} = \frac{v_0 + v_{10}}{2} = \frac{20 + (-30)}{2} = -5 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow |v_{av(0-10)}| = 5 \text{ m/s}$$

گزینه ۴

۵۵

طبق تقارن حرکت با شتاب ثابت، سرعت در $t_1 = 0$ و $t_2 = 5 \text{ s}$ ، قرینه یکدیگرند. با فرض اینکه $v_0 > 0$ است، بنابراین سرعت در $t_1 = 0$ برابر $v_0 = +10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و در $t = 5 \text{ s}$ ، برابر $v_{5s} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. بنابراین شتاب حرکت، برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10 - 10}{5} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

چون لحظه تغییر جهت، $t = 2/5 \text{ s}$ (وسط 0 و 5 s) است و خارج از بازه زمانی $(5 \text{ s}, 10 \text{ s})$ می‌باشد، پس اندازه سرعت متوسط در بازه $(5 \text{ s}, 10 \text{ s})$ ، برابر تندی متوسط است و سرعت در وسط این بازه، همان خواسته سؤال است:

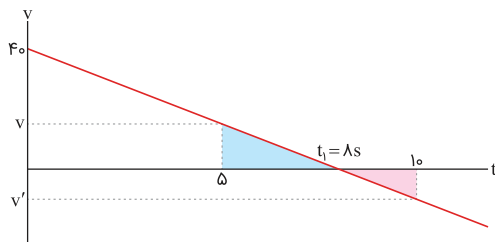
$$v_{7/5s} = |v_{av(5s, 10s)}| = |at + v_0|$$

$$\Rightarrow v_{7/5s} = |-4 \times 7/5 + 10| = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گزینه ۲

۵۶

ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم و به کمک معادله شتاب t_1 و سرعت در لحظه‌های $t = 5 \text{ s}$ و $t = 10 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - v_0}{t_1 - 0} \Rightarrow -5t_1 = -v_0 \Rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - v}{8 - 5} \Rightarrow v = 15 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{v' - 0}{10 - 8} \Rightarrow v' = -10 \text{ m/s}$$

حال برای پیدا کردن تندی مساحت قسمت رنگی را به دست می‌آوریم:

$$L = \text{مساحت} : \frac{15 \times 3}{2} + \frac{2 \times 10}{2} = 32/5$$

$$S = \frac{L}{\Delta t} = \frac{32/5}{5} = 6/5 \text{ m/s}$$

لحظه تغییر جهت و مکان تغییر جهت (رأس سهمی) را به دست می آوریم:

$$x = -2t^2 + 10t - 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-(-10)}{2(-2)} = 2.5 \text{ s} \\ x = -2(2.5)^2 + 10(2.5) - 8 = 4.5 \text{ m} \end{cases}$$

دومین لحظه ای که جهت بردار مکان عوض می شود را به دست می آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow -2t^2 + 10t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t^2 - 5t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \end{cases} \quad \checkmark$$

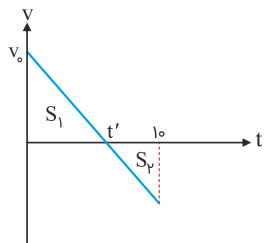
حالا سرعت متوسط در بازه $(2.5 \text{ s}, 4 \text{ s})$ را به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 4.5}{4 - 2.5} = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_0 > 0 \rightarrow \vec{v}_{av} = v_0 \vec{i} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{x} = v_0 \Delta t \Rightarrow \Delta x = +v_0 \Delta t$$

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \lambda_0 / \Delta t \text{ m/s} \Rightarrow \ell = \lambda_0 \Delta t$$

چون حرکت با شتاب ثابت است پس نمودار $v - t$ آن خطی (شیب ثابت) است. چون تندی متوسط از بزرگی سرعت متوسط بیشتر است پس حتماً تغییر جهت داشته ایم و در نتیجه نمودار نزولی بوده و در یک لحظه از محور t گذشته است.



$$\begin{cases} \text{جابه جایی} = S_1 - S_2 = v_0 \Delta t \\ \text{مسافت طی شده} = S_1 + S_2 = \lambda_0 \Delta t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \lambda_0 \Delta t \\ S_2 = \Delta t \end{cases}$$

تکنیک حرکت معکوس از t' تا صفر برای حذف v_0 :

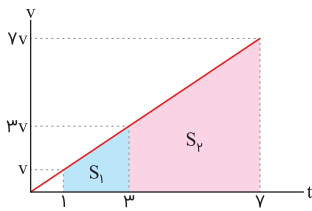
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \lambda_0 = \frac{1}{2} a (t')^2 \\ S_2 &= \Delta t = \frac{1}{2} a (\lambda_0 - t')^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} \frac{\lambda_0}{\Delta t} = \left(\frac{t'}{\lambda_0 - t'} \right)^2 \Rightarrow t' = \lambda_0 \text{ s}$$

$$\Rightarrow v_0 = 2.0 \text{ m/s}, S_1 = \lambda_0$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 2.0}{1} = -2 / \Delta t$$

$$\ell = \Delta x_{0 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = 3.5 \text{ m}$$

از آن جایی که شتاب ثابت است، نمودار $v - t$ آن به صورت خطی خواهد بود و چون اندازه جابه جایی خواسته شده است اهمیت آن ندارد شتاب را منفی در نظر بگیریم یا مثبت، پس:



$$S_1 = \frac{(3v + v)(3 - 1)}{2} = 4v \Rightarrow 4v = 20 \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

$$S_2 = \frac{(7v + 3v)(7 - 3)}{2} = \frac{10v \times 4}{2} = 20v = 20 \times 5 = 100 \text{ m}$$

برای حل این مسئله، ابتدا باید شتاب ثابت متحرک را محاسبه کنیم، سپس با استفاده از آن، بازه زمانی مورد نظر را پیدا کنیم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0=0, \Delta x=216\text{m}} 216 = \frac{1}{2}a(12)^2$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

ما به دنبال بازه‌ای هستیم که در آن مسافت طی شده ۳۶ متر باشد. با توجه به گزینه‌ها متوجه می‌شویم که اختلاف بازه زمانی ۲ ثانیه مدنظر است. پس فرض می‌کنیم بازه زمانی موردنظر برابر با $t - 2$ تا t باشد. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= \frac{1}{2}at^2 + 0 \\ x_{t-2} &= \frac{1}{2}a(t-2)^2 + 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \left| \frac{1}{2}a(t^2 - (t-2)^2) \right| \Rightarrow \Delta x = |a(2t-2)| \Rightarrow 36 = 3 \times (2t-2)$$

$$\Rightarrow (2t-2) = 12 \Rightarrow t = 7 \text{ s}$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

بنابراین، بازه زمانی $(t-2)$ تا t برابر است با $(7-2)$ تا 7 ، یعنی ۵ تا ۷ ثانیه.

با استفاده از معادله سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \frac{v_1^2 - v_0^2}{v_1^2 - v_0^2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1} \Rightarrow \frac{v_1^2 - 0}{(6)^2 - 0} = \frac{135}{15}$$

$$\Rightarrow v_1 = 18 \text{ m/s}$$

برای محاسبه مدت زمانی که سرعت متحرک به $v_1 = 6 \text{ m/s}$ و $v_2 = 18 \text{ m/s}$ می‌رسد، با استفاده از رابطه مستقل از شتاب داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow \begin{cases} 15 = \frac{6+0}{2} \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = 5 \text{ s} \\ 135 = \frac{18+0}{2} \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 15 \text{ s} \end{cases}$$

در این صورت مدت زمان موردنظر برابر است با:

$$\Delta t_T = 15 - 5 = 10 \text{ s}$$

محاسبه مستقیم:

$$\left. \begin{aligned} a &= -3 \text{ m/s}^2 \\ \Delta x &= 200 \text{ m} \\ v_f &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = -2a\Delta x \Rightarrow v_i^2 = 6 \times 200 = 1200 \Rightarrow v_i = 20\sqrt{3} \text{ m/s}$$

از معادله سرعت- زمان، زمان کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

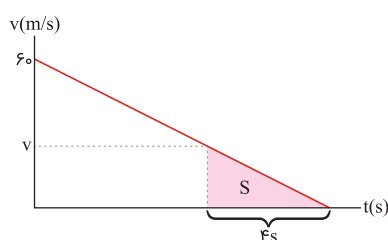
$$v_f = at + v_i \Rightarrow t = -\frac{20\sqrt{3}}{-3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

یافتن زمان شروع ۳ ثانیه آخر: ۳ ثانیه آخر حرکت برابر با t_3 خواهد بود. اکنون باید در این زمان سرعت ابتدایی را پیدا کنیم و سپس جابه‌جایی در ۳ ثانیه آخر حرکت را بدست آوریم.

$$v_1 = a(t - 3) + v_i = -3\left(\frac{20\sqrt{3}}{3} - 3\right) + 20\sqrt{3} = 9 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t = \frac{1}{2} \times -3 \times 9 + 9 \times 3 = 13.5 \text{ m}$$

از نمودار سرعت- زمان استفاده می‌کنیم:

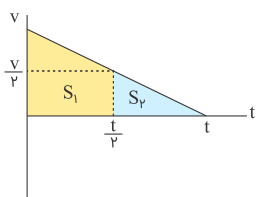


$$S = 32 \Rightarrow \frac{v \times t}{2} = 32 \Rightarrow v = 16 \text{ m/s}$$

با تشابه مثلث رنگی و مثلث بزرگ، مساحت مثلث هواپیما روی باند است به دست می‌آید، توجه کنید که نسبت مساحت‌های دو مثلث با توان دوم نسبت اضلاع رابطه مستقیم دارد. پس داریم:

$$\frac{S}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{v}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{16}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{4}{15}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \frac{16}{225} \Rightarrow S_{\text{کل}} = 450 \text{ m}$$

نمودار $v - t$ حرکت را رسم می‌کنیم:



$$S_1 = \frac{v + \frac{v}{2}}{2} \times \frac{t}{2} = 150 \Rightarrow \frac{3v}{4} \times t = 150 \Rightarrow vt = 200$$

$$S_2 = \frac{\frac{v}{2} \times \frac{t}{2}}{2} = \frac{vt}{4} = \frac{200}{2} = 100 \text{ m}$$

کل جابه‌جایی اتومبیل برابر $S_1 + S_2$ است:

$$\Delta x_{\text{کل}} = 150 + 100 = 250 \text{ m}$$

راه‌حل دوم:

فرض مسئله را عوض می‌کنیم. یعنی اتومبیل از حال سکون شروع به حرکت کرده بعد $\frac{t}{2}$ از زمان شروع حرکت به اندازه Δx_1 جابه‌جا می‌شود و $\frac{t}{2}$ بعد را به اندازه $3\Delta x_1$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین کل جابه‌جایی آن $4\Delta x_1$ است. ابتدا Δx_1 را به دست می‌آوریم:

$$3\Delta x_1 = 150 \Rightarrow \Delta x_1 = 50 \text{ m}$$

حالا کل جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_{\text{کل}} = 4\Delta x_1 = 4 \times 50 = 200 \text{ m}$$

از رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2(n-1)$ داریم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{2/5at^2}{1/5at^2} = \frac{2}{1}$$

روش دوم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = n \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}an^2 \\ t_2 = 2n \Rightarrow x_2 = 4 \times \frac{1}{2}an^2 = 4x_1 \\ t_3 = 3n \Rightarrow x_3 = 9 \times \frac{1}{2}an^2 = 9x_1 \end{cases}$$

$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 3x_1$: جابه‌جایی در n ثانیه دوم

$\Delta x_3 = x_3 - x_1 = 8x_1$: جابه‌جایی در n ثانیه سوم

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_3}{\Delta x_2} = \frac{8}{3}$$

در $t = 0$ ، متحرک در $x = 15 \text{ m}$ قرار دارد. کمترین فاصله یک متحرک از یک مکان، در حرکت با شتاب ثابت، اگر مخالف صفر باشد، یا در لحظه شروع حرکت یا در لحظه تغییر جهت و یا در پایان حرکت است. چون گزینه‌ها کمتر از 15 m است، به سراغ مکان تغییر جهت می‌رویم. در اصل، سؤال در اینجا، مکان تغییر جهت را می‌خواهد:

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 6t + 15 \Rightarrow t_{\text{تغییر جهت}} = \frac{-(-6)}{2(\frac{1}{3})} = \frac{9}{2} \text{ s}$$

$$x_{\text{تغییر جهت}} = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{9}{2}\right) + 15 = 13\frac{1}{5} - 27 + 15 = 1\frac{1}{5} \text{ m}$$

باید نمودار $x - t$ را رسم کنیم تا ببینیم در چند ثانیه فاصله متحرک تا مبدأ کمتر یا برابر ۸ است. پس:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2t^2 - 12t + 8 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

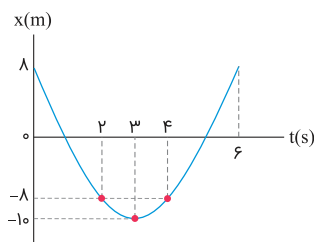
$$v_0 = -12 \text{ m/s}, x_0 = 8 \text{ m}$$

$$v = at + v_0 = 4t - 12 \xrightarrow{v=0} 0 = 4t - 12 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

$$x(3\text{s}) = 2(9) - 12(3) + 8 = -10 \text{ m}$$

$$x = -8 \Rightarrow -8 = 2t^2 - 12t + 8 \Rightarrow 2t^2 - 12t + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \end{cases}$$



طبق نمودار در بازه زمانی $(0, 2\text{s})$ و $(4\text{s}, 6\text{s})$ این اتفاق می‌افتد که برابر با 4s است.

ابتدا با استفاده از نمودار سرعت-زمان، در بازه زمانی ۰ تا ۵s شیب خط را که همان شتاب است محاسبه می‌کنیم که برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-20)}{5} = 4 \text{ m/s}^2$$

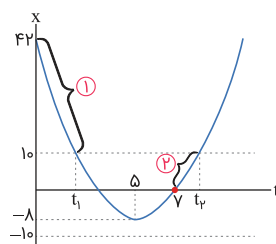
باتوجه به نمودار، شیب در بازه زمانی صفر تا t ثابت است، پس:

$$4 = \frac{10 - (-20)}{t} \Rightarrow t = 7.5 \text{ s}$$

حال مکان متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(4)(5)^2 + (-20)(5) + 42 \Rightarrow x = -8 \text{ m}$$

سپس نمودار مکان-زمان آن را رسم می‌کنیم.



طبق نمودار، کافی است زمان‌هایی که متحرک در بازه‌های t_1 تا t_2 حرکت می‌کند را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 10 - 42 = 2t_1^2 - 20t_1 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s} \\ \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x &= v_0t \Rightarrow 10 - 0 = 10(t_2 - 7.5) \Rightarrow t_2 = 8.5 \text{ s} \end{aligned}$$

پس در $t_2 - t_1 = 6.5 \text{ s}$ فاصله متحرک تا مبدأ، کمتر یا مساوی ۱۰ بوده است.

با توجه به تقارن نمودار نسبت به $t = 4 \text{ s}$ ، تندی متحرک در $t = 0 \text{ s}$ و $t = 8 \text{ s}$ باهم برابر و سرعت در این دو لحظه قرینه یکدیگر است.

$$\left. \begin{aligned} t = 0 \Rightarrow v = ?, x = 12 \text{ m} \\ t = 8 \text{ s} \Rightarrow v = 0, x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow -12 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4$$

$$\Rightarrow v_0 = -6 \text{ m/s} \Rightarrow v_{8s} = +6 \text{ m/s}$$

در نمودار مکان-زمان نقطهٔ مینیمم جایی است که سرعت متحرک صفر می‌شود.

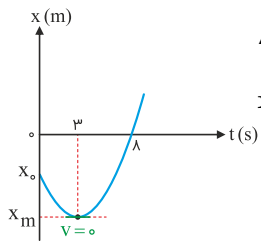
$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 0 - 18 = \frac{0 + v_2}{2} \times 6 \Rightarrow v_0 = -6 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times 6 - 6 \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

در لحظه $t = 4 \text{ s}$ سرعت حرکت صفر می‌شود. چون حرکت از این لحظه به بعد از حال سکون انجام می‌شود، می‌توان حرکت را وارونه در نظر گرفت. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= 2a + v_4 \\ v_4 &= 4a + v_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{v_4=0} \frac{v_2}{v_4} = \frac{4a}{2a} = 2$$

از ۰ تا ۳ s تا ۸ s داریم:



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t$$

$$x_m = \frac{1}{2}a(3)^2 + 0$$

از ۰ تا ۳ s (تکنیک حرکت به‌طور معکوس):

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + 0 \Rightarrow x_m - x_o = \frac{1}{2}a(3)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a(3)^2 - |x_o| = \frac{1}{2}a(3)^2 \Rightarrow |x_o| = \frac{1}{2}a(8^2) - \frac{1}{2}a(3^2) = 17a$$

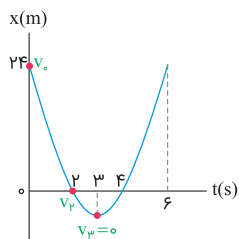
$$\Rightarrow x_o = -17a$$

$$\vec{d} = \text{جاب‌جایی} = \Delta x = x_2 - x_1 = 0 - x_o = 17a$$

$$\ell = \text{مسافت طی‌شده} = (x_m - x_o) + (x_m - 0) = \frac{1}{2}a \times 9 + \frac{1}{2}a \times 25 = 17a$$

$$\frac{\vec{d}}{\ell} = \frac{17a}{17a} = 1$$

از نمودار $x - t$ کمک می‌گیریم:



$$v = at + v_o \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 0 = 3a + v_o \\ v_2 = 2a + v_o \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} v_2 = -a$$

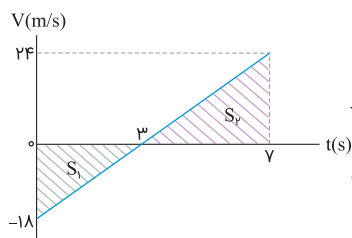
با جایگذاری در معادله دوم داریم:

$$-a = 2a + v_o \Rightarrow v_o = -3a$$

بین دو بازه $(0, 2s)$ معادله مستقل از زمان را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_2 - v_o &= 2a\Delta x \Rightarrow (-a) - (-3a) = 2a(-24) \\ \Rightarrow a - 3a &= -48a \Rightarrow +8a = 48a \\ \Rightarrow a &= 6 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v_o = -3(6) = -18 \text{ m/s} \end{aligned}$$

حال نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم:



$$v_{Vs} = (6)(7) - 18 = 24 \text{ m/s}$$

برای محاسبه مسافت باید مساحت S_1 و S_2 را با هم جمع کنیم و برای جابه‌جایی آن‌ها با علامت جبری با هم جمع کنیم. پس:

$$d = S_1 + S_2 = \frac{3 \times 18}{2} + \frac{4 \times 24}{2} = 27 + 48 = 75 \text{ m}$$

$$\Delta x = -S_1 + S_2 = -27 + 48 = 21 \text{ m}$$

$$\frac{S_{(o, Vs)}}{v_{(o, Vs)}} = \frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{d}{\Delta x} = \frac{75}{21} = \frac{25}{7}$$

گام اول: جابه‌جایی متحرک را در بازه زمانی ۱s تا ۶s به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = 3 \times 5 = 15 \text{ m}$$

چون متحرک تغییر جهت داشته پس مسافت بزرگ‌تر از جابه‌جایی است؛ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نمی‌توانند درست باشند.

گام دوم: جابه‌جایی متحرک را در بازه‌های زمانی یک ثانیه‌ای بررسی می‌کنیم. چون سرعت در $t = 2\text{s}$ صفر است، اگر جابه‌جایی در ثانیه سوم d باشد در ثانیه‌های بعدی مضرب فردی از d است:

$$2\text{s تا } 1\text{s} : \Delta x_1 = -\vec{d}$$

$$3\text{s تا } 2\text{s} : \Delta x_2 = \vec{d}$$

$$4\text{s تا } 3\text{s} : \Delta x_3 = 3\vec{d}$$

$$5\text{s تا } 4\text{s} : \Delta x_4 = 5\vec{d}$$

$$6\text{s تا } 5\text{s} : \Delta x_5 = 7\vec{d}$$

گام سوم: d را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5$$

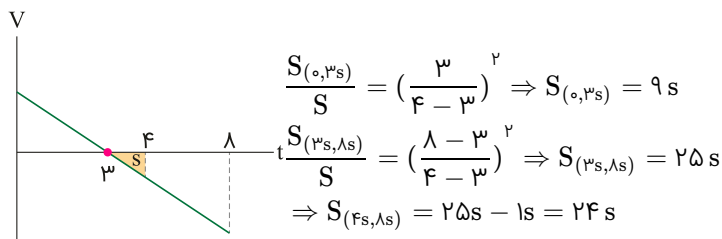
$$15 = -d + d + 3d + 5d + 7d \Rightarrow 15 = 15d \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

گام چهارم: مسافت طی‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| + |\Delta x_5|$$

$$\ell = 1 + 1 + 3 + 5 + 7 = 17 \text{ m}$$

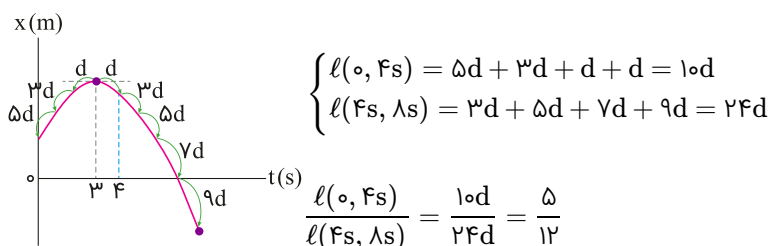
روش اول: نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث رنگی شده را S در نظر بگیریم، مساحت مثلث ۳ ثانیه نخست و دوزنقه بازه $(4\text{s}, 8\text{s})$ را به دست می‌آوریم:

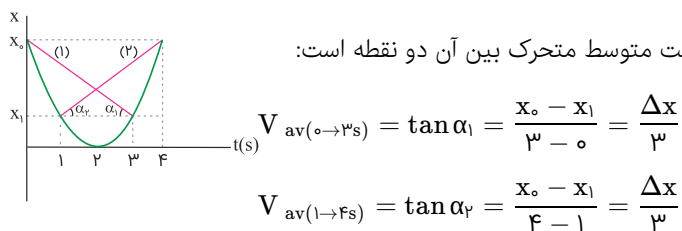


حالا نسبت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\ell_{(0,4\text{s})}}{\ell_{(4\text{s},8\text{s})}} = \frac{S_{(0,3\text{s})} + S_{(3\text{s},4\text{s})}}{S_{(4\text{s},8\text{s})}} = \frac{9 \text{ s} + 1 \text{ s}}{24 \text{ s}} = \frac{5}{12}$$

روش دوم: مسافت طی شده در ثانیه‌های متوالی از لحظه تغییر جهت به قبل به صورت $d, 3d, 5d, 7d, 9d, \dots$ می‌باشد. پس:





شیب خطی که دو نقطه از نمودار مکان- زمان را به هم می‌رساند برابر با سرعت متوسط متحرک بین آن دو نقطه است:

$$|V_{av(o \rightarrow 3s)}| = |V_{av(1 \rightarrow 4s)}|$$

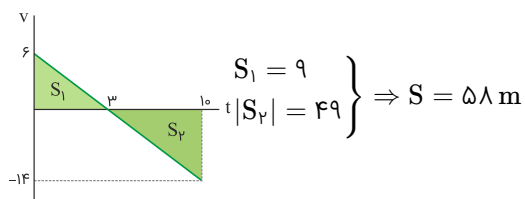
باتوجه به ماکزیمم سهمی می‌توانیم سرعت اولیه و شتاب حرکت را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = \frac{v + v_o}{2} \Delta t$$

$$36 - 27 = \frac{o + v_o}{2} \times 3 \Rightarrow v_o = 6 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_o \Rightarrow o = a \times 3 + 6 \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

کافی است نمودار سرعت- زمان را رسم کنیم:

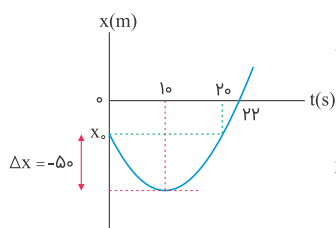


در لحظه $t = 10\text{s}$ (رأس سهمی) سرعت صفر است. داریم:

$$t_{\text{راس}} = \frac{-v_o}{a} \Rightarrow \frac{-v_o}{a} = 10 \Rightarrow v_o = -10a$$

جابه‌جایی از لحظه صفر تا $t = 10\text{s}$ برابر است با مسافت طی شده در این بازه زمانی، پس:

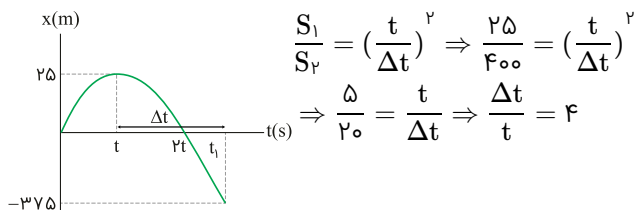
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t \Rightarrow -50 = \frac{1}{2}a(100) + (-10a) \times 10 \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2, v_o = -10 \text{ m/s}$$



مکان متحرک در لحظه $t = 20\text{s}$ به دلیل تقارن در سهمی، همان مکان اولیه است. پس به کمک معادله مکان- زمان در $t = 22\text{s}$ داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 - 10t + x_o \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}(484) - 10(22) + x_o \Rightarrow x_o = -22\text{m}$$

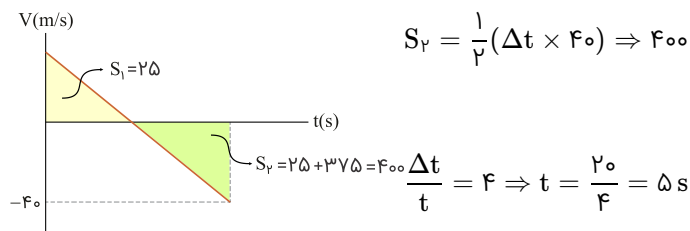
باتوجه به نمودار مکان- زمان داده شده، نمودار سرعت- زمان مربوط به حرکت را رسم می‌کنیم. مسافت پیموده شده توسط جسم در هر بازه مشخص شده است. پس می‌توان نوشت:



ازطرفی برای محاسبه مسافت پیموده شده در مدت زمان Δt داریم:

$$S_r = \frac{1}{2}(\Delta t \times F_{00}) \Rightarrow F_{00} = 20 \Delta t \Rightarrow \Delta t = 20 \text{ s}$$

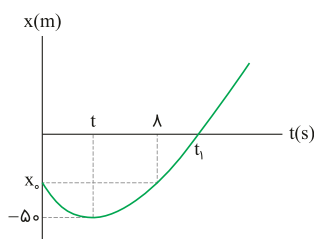
پس لحظه t برابر است با:



در مدت زمانی که جسم در مکان‌های مثبت قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور است. در این صورت مدت زمان خواسته شده برابر است با:

$$2t = 2 \times 5 = 10 \text{ s}$$

در لحظه‌ای که متحرک به مکان $x = -50 \text{ m}$ می‌رسد، سرعت برابر صفر است.



با استفاده از معادله سرعت- جابه‌جایی داریم:

در ۸ ثانیه اول حرکت، سرعت متوسط برابر صفر است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_8}{2} = 0 \Rightarrow v_0 = -v_8$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_8 = 4(8) - v_0 \Rightarrow 2v_8 = 32 \Rightarrow v_8 = 16 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_0 = -16 \text{ m/s}$$

برای محاسبه سرعت متوسط در مدت زمان مشخص شده می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{v_{t_1} + v_0}{2} = \frac{20 + (-16)}{2} = 2 \text{ m/s}$$

مسافت طی شده تا لحظه $t = ۶ s$ دو برابر اندازه جابه‌جایی در $۳ s$ اول است پس داریم:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۳ = \frac{\ell}{۶} \Rightarrow \ell = ۱۸ m \Rightarrow \Delta x = ۹ m$$

در لحظه $t = ۳ s$ سرعت متحرک صفر است بنابراین اثر جابه‌جایی در ثانیه چهارم را $-x$ فرض کنیم، جابه‌جایی در ثانیه پنجم و ثانیه ششم به ترتیب $-۳x$ و $-۵x$ است. از لحظه $t = ۳ s$ تا $t = ۶ s$ متحرک $۹ m$ جابه‌جا شده است. بنابراین داریم:

$$-x - ۳x - ۵x = -۹ \Rightarrow -۹x = -۹ \Rightarrow x = ۱$$

بنابراین متحرک در ثانیه هفتم حرکت می‌تواند به اندازه $-۷x = -۷ m$ جابه‌جا شود و از مبدأ مکان بگذرد. پس کلاً بردار مکان متحرک $۷ s$ در جهت محور x است.

باتوجه به نمودار، سرعت متحرک در $t = ۴ s$ ، برابر صفر است. همچنین باتوجه به صورت سؤال، سرعت در لحظه $t = ۵/۵ s$ ، برابر است با:

$$v_{۵/۵ s} = \frac{\Delta x_{(۵,۶)}}{۶ - ۵} = \frac{-۶}{۱} = -۶ \frac{m}{s}$$

حالات شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۶ - ۰}{۵/۵ - ۴} = -۴ \frac{m}{s^۲}$$

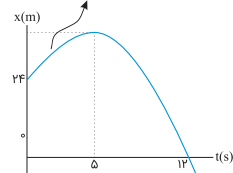
با استفاده از معادله مستقل از زمان، تندی در لحظه عبور از مبدأ را به دست می‌آوریم:

$$v_{۴ s}^۲ - v_{x=۰}^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - v_{x=۰}^۲ = ۲(-۴) \times ۸$$

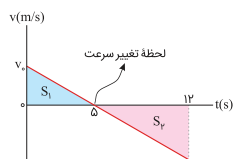
$$\Rightarrow |v_{x=۰}| = ۸ \frac{m}{s}$$

در لحظه $t = ۵$ s تغییر سرعت داریم پس نمودار سرعت زمان مطابق شکل زیر خواهد بود. دو مثلث ایجاد شده در نمودار $v - t$ ، متشابه‌اند پس:

شیب مثبت است پس سرعت مثبت است



$\Rightarrow$



$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{49}{25} \quad (۱)$$

از طرفی طبق داده صورت سوال $S_2 - S_1 = ۲۴$ است پس:

$$S_2 - S_1 = ۲۴ \xrightarrow{(۱)} \frac{49}{25} S_1 - S_1 = ۲۴ \Rightarrow \frac{24}{25} S_1 = ۲۴ \Rightarrow S_1 = ۲۵$$

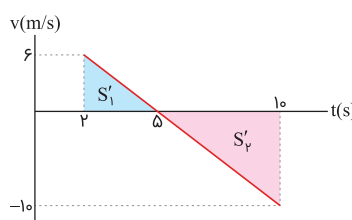
طبق نمودار $v - t$:

$$S_1 = \frac{\omega \times v_0}{2} = ۲۵ \Rightarrow v_0 = ۱۰ \text{ m/s}$$

حال معادله سرعت را با توجه به ثابت بودن شتاب می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} v &= at + v_0 \Rightarrow v = at + ۱۰ \\ a &= \frac{0 - ۱۰}{5 - 0} = -۲ \text{ m/s}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = -۲t + ۱۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = -۲ \times ۲ + ۱۰ = ۶ \text{ m/s} \\ v_{10} = -۲ \times ۱۰ + ۱۰ = -۱۰ \text{ m/s} \end{cases}$$



$$S'_1 = \frac{3 \times 6}{2} = ۹$$

$$S'_2 = \frac{-۱۰ \times 5}{2} = ۲۵$$

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۲۵ + ۹}{۱۰ - ۲} = \frac{۳۴}{۸} = \frac{۱۷}{۴}$$

بازه زمانی مورد نظر برای محاسبه سرعت متوسط، از $t = ۰$ s تا $t = ۱۴$ s است، زیرا در این بازه بردار مکان متحرک در جهت محور x (یعنی x مثبت) است.

$$\bar{v}_{(0-14s)} = \frac{0 - ۲۸}{۱۴} = -۲ \text{ m/s} \Rightarrow |\bar{v}_{(0-14s)}| = ۲ \text{ m/s}$$

$$v_2 - v_0 = ۲a\Delta x \Rightarrow 0 - v_0^2 = ۲(-۲)۴ \Rightarrow v_0 = ۴ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = -t^2 + ۴t - ۳$$

$$\Rightarrow x = -(t^2 - ۴t + ۳)$$

$$\Rightarrow x = -(t - ۱)(t - ۳) \Rightarrow x = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۱ \\ t_2 = ۳ \end{cases} \Rightarrow \text{اگر } t = ۴ \Rightarrow x = -۳$$

$$S = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{۱ + ۱ + ۳}{۳} = \frac{۵}{۳} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

روش اول: نمودار یک سهمی است که محور زمان (t) را در $t = ۲s$ و $t = ۵s$ قطع می‌کند (یعنی مکان در این لحظات صفر است). معادله سهمی را می‌توان به صورت $x = K(t - ۲)(t - ۵)$ نوشت که t و t ریشه‌ها هستند. پس:

$$x = K(t - ۲)(t - ۵)$$

نقطه دیگری که از نمودار مشخص است $(۰, ۲۰)$ (یعنی در $t = ۰, x = ۲۰m$)، با جایگذاری این نقطه در معادله، مقدار K را پیدا می‌کنیم:

$$۲۰ = K(۰ - ۲)(۰ - ۵) \Rightarrow ۲۰ = ۱۰K \Rightarrow K = ۲$$

بنابراین، معادله مکان - زمان متحرک به صورت زیر است:

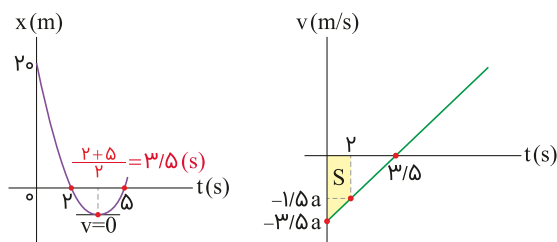
$$x(t) = ۲(t - ۲)(t - ۵) \Rightarrow x(t) = ۲(t^2 - ۷t + ۱۰) \Rightarrow x(t) = ۲t^2 - ۱۴t + ۲۰$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= ۲t^2 - ۱۴t + ۲۰ \\ x(t) &= \frac{1}{۲}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = ۴m/s^2, v_0 = -۱۴m/s, x_0 = ۲۰m$$

$$\Rightarrow v(t) = ۴t - ۱۴ \xrightarrow{t=۵s} v(۵) = ۶m/s$$

روش دوم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{۲+۵}{۲} = ۳/۵s \Rightarrow ۰ = ۳/۵a + v_0 \Rightarrow v_0 = -۳/۵a \\ t = ۲s \Rightarrow v = ۲a + v_0 = ۲a + (-۳/۵a) = -۱/۵a \end{cases}$$



$$S = \frac{(1/۵a + ۳/۵a) \times ۲}{۲} = ۲۰ \Rightarrow ۵a = ۲۰ \Rightarrow a = ۴m/s^2$$

$$\Rightarrow v_0 = -۳/۵(۴) = -۱۴m/s \Rightarrow v = ۴t - ۱۴$$

$$\xrightarrow{t=۵s} v = ۲۰ - ۱۴ = ۶m/s$$

با توجه به نمودار، متحرک در $t = ۵s$ متوقف می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow ۰ = ۵a + v_0 \Rightarrow v_0 = -۵a$$

معادله مکان - زمان را می‌نویسیم و دو لحظه $t = ۱s$ و $t = ۱۲s$ را در آن جایگذاری می‌کنیم. دقت کنید $v_0 = -۵a$ است.

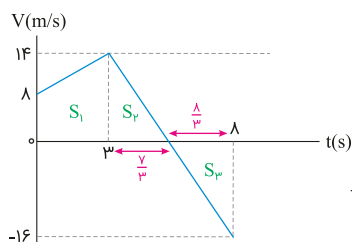
$$x = \frac{1}{۲}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} ۶۶ = \frac{1}{۲}a - ۵a + x_0 \\ ۰ = \frac{1}{۲}a \times ۱۴۴ - ۵a \times ۱۲ + x_0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} \begin{cases} ۶۶ = -\frac{9}{۲}a + x_0 & \text{(I)} \\ ۰ = ۱۲a + x_0 \Rightarrow a = -\frac{x_0}{۱۲} & \text{(II)} \end{cases}$$

رابطه (II) را در (I) جایگذاری می‌کنیم:

$$۶۶ = \frac{9x_0}{۲۴} + x_0 \Rightarrow ۶۶ = \frac{۳۳x_0}{۲۴} \Rightarrow x_0 = ۴۸m$$

ابتدا نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم. شیب نمودار $v - t$ برابر شتاب است.



$$v = at + v_0$$

$$v(3s) = (2)(3) + 8 = 14 \text{ m/s}$$

$$v(10s) = (-6)(10 - 7) + 14 = -16 \text{ m/s}$$

$$0 = (-6)t + 14 \Rightarrow t = \frac{14}{6} s$$

$$L = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{8 + 14}{2} \times 3 + \frac{\left(\frac{14}{3}\right)(14)}{2} + \frac{\left(\frac{16}{3}\right)(16)}{2} = \frac{212}{3} \text{ m}$$

$$S = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\frac{212}{3}}{10} = \frac{212}{30} = \frac{53}{6} \text{ m/s}$$

ابتدا نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم:

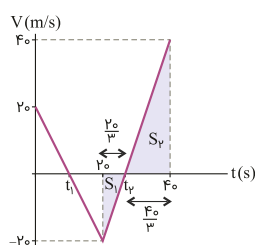
$$(0, 20s) : v = at + v_0 \xrightarrow{a=-2 \text{ m/s}^2} 2t_1 = 20 \Rightarrow t_1 = 10s$$

$$t = 20s : v(20) = -2 \times 20 + 20 = -20 \text{ m/s}$$

$$(20s, 40s) : v = a(t_r - 20) + v_0 \xrightarrow{a=3 \text{ m/s}^2} 3(t_r - 20) = 20 \Rightarrow t_r = \frac{20}{3} + 20 = \frac{80}{3} s$$

$$t = 40s : v(40) = 3 \times (40 - 20) - 20 = 40 \text{ m/s}$$

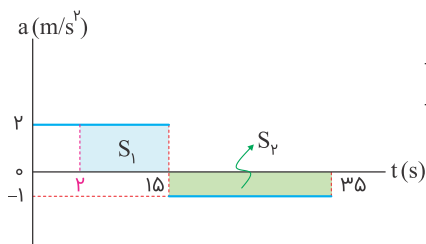
مسافت طی شده برابر است با مجموع مساحت‌های قدر مطلق سطح زیر نمودار سرعت- زمان نسبت به محور زمان در بازه مورد نظر.



$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{20 \times \frac{20}{3}}{2} = \frac{200}{3} \\ S_2 &= \frac{20 \times \frac{20}{3}}{2} = \frac{200}{3} \\ S_3 &= \frac{40 \times \frac{40}{3}}{2} = \frac{800}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1200}{3} \text{ m}$$

بنابراین، مسافتی که متحرک در ۲۰ ثانیه دوم (از $t = 20s$ تا $t = 40s$) طی می‌کند، برابر با $\frac{1200}{3}$ متر است.

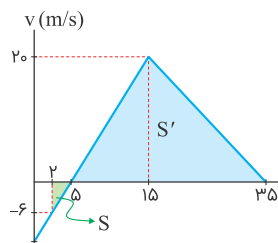
مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان با تغییرات سرعت (Δv) برابر است.



$$v_{15} - v_0 = S_1 \Rightarrow v_{15} - (-6) = 26 \Rightarrow v_{15} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{35} - v_{15} = S_2 \Rightarrow v_{35} - 20 = -20 \Rightarrow v_{35} = 0$$

حالا می‌توانیم با رسم نمودار سرعت - زمان جابه‌جایی را از ۲ تا ۱۵ ثانیه به دست آوریم:

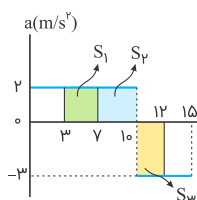


$$\Delta x = S + S'$$

$$\Delta x = \frac{3 \times (-6)}{2} + \frac{30 \times 20}{2} = 291 \text{ m}$$

$$x_{35} - (-16) = 291 \Rightarrow x_{35} = 275 \text{ m}$$

گام اول: سرعت متحرک را در لحظه‌های $t = 7 \text{ s}$ و $t = 10 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:



$$S_1 = 2 \times 10 = 20 \text{ m/s}$$

$$v_7 - v_0 = 2 \Rightarrow v_7 - 1 = 2 \Rightarrow v_7 = 3 \text{ m/s}$$

$$S_2 = 2 \times 10 = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{10} - v_7 = 2 \Rightarrow v_{10} - 3 = 2 \Rightarrow v_{10} = 5 \text{ m/s}$$

گام دوم: جابه‌جایی را در بازه زمانی ۷ s تا ۱۰ s محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \Delta x_1 = 3 \times \frac{5 + 3}{2} = 12 \text{ m}$$

گام سوم: سرعت متحرک را در لحظه $t = 12 \text{ s}$ به دست می‌آوریم دقت کنید که سرعت در ابتدای بازه زمانی (۱۰ s تا ۱۲ s) ۵ m/s است:

$$S_3 = 2 \times 2 = 4 \text{ m/s} \Rightarrow \Delta v = -4 \text{ m/s} \Rightarrow v_{12} - v_{10} = -4$$

$$\Rightarrow v_{12} - 5 = -4 \Rightarrow v_{12} = 1 \text{ m/s}$$

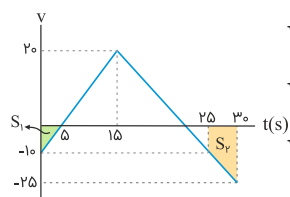
گام چهارم: جابه‌جایی را در بازه زمانی (۱۰ s تا ۱۲ s) محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{5 + 1}{2} \times 2 = 6 \text{ m}$$

گام پنجم: سرعت متوسط را در بازه زمانی ۷ s تا ۱۲ s به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12 + 6}{5} = 3.6 \text{ m/s}$$

بهترین روش رسم نمودار سرعت- زمان است.



$$v_{10} = at + v_0$$

$$v_{10} = 2 \times 10 - 10 \Rightarrow v_{10} = 10 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2t + (-10) \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

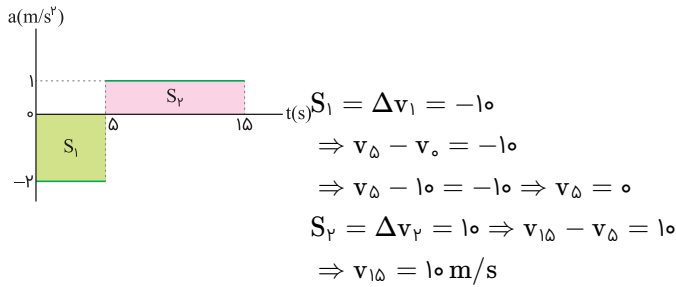
$$v_{20} = at + v_0$$

$$v_{20} = -3 \times 10 + 20 = -10 \text{ m/s}$$

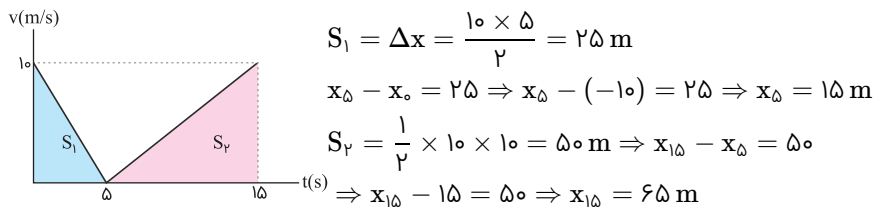
$$v_{30} = -3 \times 10 + 20 = -10 \text{ m/s}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{20 + 10}{2} \times 10}{\frac{10 \times 10}{2}} = \frac{150}{50} = 3$$

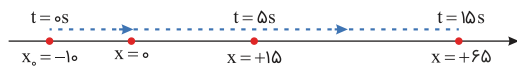
سطح زیر نمودار شتاب- زمان با تغییرات سرعت برابر است.



اکنون نمودار سرعت- زمان حرکت جسم را رسم می‌کنیم، مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان با جابه‌جایی برابر است. در این صورت داریم:



بنابراین می‌توان مسیر حرکت جسم را رسم کرد:



در این صورت می‌توان نتیجه گرفت:

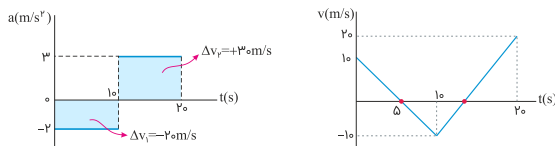
- (۱) بردار مکان جسم یک بار تغییر کرده است، اما علامت سرعت تغییر نکرده است.
- (۲) جهت حرکت جسم تغییر نکرده است در این صورت مسافت و جابه‌جایی باهم برابر است.
- (۳) شتاب متوسط در مدت‌زمان نشان داده‌شده برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 10}{15 - 0} = 0$$

(۴) سرعت متوسط در مدت‌زمان نشان داده‌شده برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{75}{15} = 5 m/s$$

گام اول: نمودار سرعت زمان متحرک را تا لحظه $t = 20s$ رسم می‌کنیم:



گام دوم: باتوجه به نمودار $v-t$ جابه‌جایی متحرک در $10s$ اول صفر است: پس برای دومین بار در لحظه $t = 10s$ از مبدأ عبور می‌کند.

گام سوم: اگر شروع مجدد حرکت را با شتاب $3 m/s^2$ لحظه $t = 10s$ فرض کنیم، $\frac{20}{3}s$ بعد سرعت متحرک صفر و $\frac{20}{3}s$ بعد سرعت متحرک $+10 m/s$ شده و در این لحظه

مجدداً متحرک از مبدأ عبور می‌کند: پس باتوجه به اینکه فرض کردید لحظه شروع حرکت $t = 10s$ باشد، لحظه‌ای که متحرک برای سومین بار از مبدأ عبور می‌کند را به دست می‌آوریم:

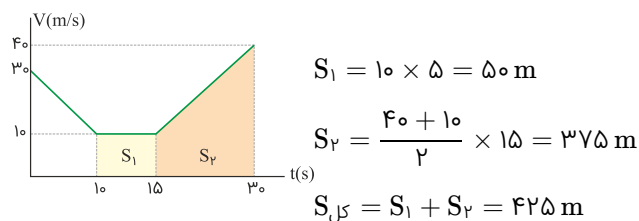
$$t = 10 + \frac{20}{3} = \frac{50}{3} s$$

کافی است نمودار سرعت- زمان حرکت را رسم کنیم. سطح زیر نمودار ($v-t$) برابر با جابه‌جایی است که نسبت جابه‌جایی به زمان برابر با سرعت متوسط است.

$$t = 10 \text{ s} \text{ تا } t = 0 \text{ s} : v_1 = a_1 t + v_0 \xrightarrow{a_1 = -2 \text{ m/s}^2} v_1 = -2 \times 10 + 30 = 10 \text{ m/s}$$

$$t = 15 \text{ s} \text{ تا } t = 10 \text{ s} : v_2 = a_2 t + v_1 \xrightarrow{a_2 = 0} v_2 = v_1 = 10 \text{ m/s}$$

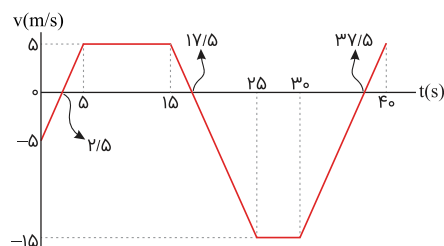
$$t = 30 \text{ s} \text{ تا } t = 15 \text{ s} : v_3 = a_3 t + v_2 \xrightarrow{a_3 = 2 \text{ m/s}^2} v_3 = 2 \times 15 + 10 = 40 \text{ m/s}$$



$$v_{\text{av}} = \frac{S_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{600}{30} = 20 \text{ m/s}$$

از روی نمودار $a-t$ نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:

$$l = \frac{25}{2} + \frac{(12/5 + 10)50}{2} + \frac{(20 + 5)15}{2} + \frac{2/5 \times 5}{2} = 262/5$$



گام اول: طبق صورت سوال:

$$\text{اگر خلاف جهت هم بروند} : v_2 + v_1 = 16 \text{ m/s}$$

$$\text{اگر هم جهت حرکت کنند} : v_2 - v_1 = 240 \text{ m/min} = 4 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_1 = 16 \\ v_2 - v_1 = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} 2v_2 = 20 \Rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

گام دوم: خواسته تست:

$$v_2 - v_1 = 4 \Rightarrow v_1 = 6 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

معادله مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم. چون نمودار مکان - زمان دو متحرک به صورت خط راست است، سرعت دو متحرک ثابت است و معادله مکان - زمان آن‌ها از رابطه $x = vt + x_0$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} v_A = \frac{500 - 400}{10} = 10 \text{ m/s} \\ v_B = \frac{0 - (-300)}{10} = 30 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 10t + 400 \\ x_B = 30t - 300 \end{cases}$$

فاصله دو متحرک برابر $|x_A - x_B|$ است. پس:

$$\begin{aligned} |x_A - x_B| = 600 &\Rightarrow |10t + 400 - 30t + 300| = 600 \\ \Rightarrow |-20t + 700| = 600 &\Rightarrow \begin{cases} -20t + 700 = 600 \Rightarrow t_1 = 5 \text{ s} \\ -20t + 700 = -600 \Rightarrow t_2 = 65 \text{ s} \end{cases} \end{aligned}$$

خواسته سؤال $\frac{t_2}{t_1}$ برابر $\frac{65}{5} = 13$ است.

ابتدا سرعت دو متحرک را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{200 - 100}{10} = 10 \text{ m/s} \\ v_B &= \frac{200}{10} = 20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

چون دو متحرک هم‌جهت حرکت کرده‌اند، سرعت نسبی آن‌ها برابر است با:

$$v = 20 - 10 = 10 \text{ m/s}$$

هنگامی که فاصله دو متحرک کمتر یا مساوی ۲۰ متر می‌شود یعنی فاصله دو متحرک ابتدا ۲۰ متر شده، سپس به صفر رسیده و مجدداً برابر ۲۰ m می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}} \Delta t \Rightarrow 40 = 10t \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

روش دوم:

باتوجه به نمودار، معادله حرکت جسم‌ها را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 10t + 100 \\ x_B = 20t - 200 \end{cases}$$

با استفاده از شرط مسأله در مورد فاصله دو جسم داریم:

$$\begin{cases} x_A - x_B = 20 \Rightarrow -10t + 300 = 20 \Rightarrow t = 28 \text{ s} \\ x_B - x_A = 20 \Rightarrow +10t' - 300 = 20 \Rightarrow t' = 32 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s} \end{cases}$$

ابتدا معادله حرکت دو جسم را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{0 - 16}{1 - 0} t + 16 \Rightarrow x_A = -2t + 16 \\ x_B = \frac{-25 - (-29)}{1 - 0} t + (-29) \Rightarrow x_B = 0/5t - 29 \end{cases}$$

در لحظه‌ای که دو جسم به هم می‌رسند داریم:

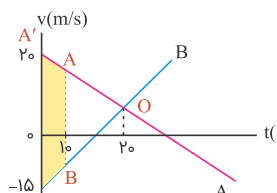
$$x_A = x_B \Rightarrow -2t + 16 = 0/5t - 29 \Rightarrow 2/5t = 45 \Rightarrow t = 11.25 \text{ s}$$

مکان دو جسم در این لحظه برابر است با:

$$x_A = x_B = 0/5 \times 11.25 - 29 \Rightarrow x_A = x_B = -20 \text{ m}$$

مساحت ناحیه هاشور خورده مجموع مسافتی است که دو متحرک A و B طی کرده‌اند.

از تشابه مثلث‌های $\triangle OA'B'$ و $\triangle OAB$ طول ضلع AB را به دست می‌آوریم:



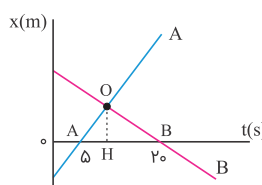
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{10}{20} \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \times 35 = 17.5$$

حالا مساحت ذوزنقه $ABA'B'$ که هم‌اندازه مجموع مسافت‌های طی شده است را به دست می‌آوریم:

$$\ell = \frac{35 + 17.5}{2} \times 10 = 262.5 \text{ m}$$

راه حل اول:

در مثلث $\triangle OAB$ شیب خط OA دو برابر بزرگی شیب خط OB است بنابراین $HB = 2AH$ است پس:



$$\begin{aligned} AH + HB &= 15 \\ 3AH &= 15 \Rightarrow AH = 5 \end{aligned}$$

(یعنی لحظه $t = 20 \text{ s}$)

بنابراین دو متحرک در لحظه $t = 10 \text{ s}$ به هم می‌رسند.

چون در ابتدا از هم 150 m فاصله داشته‌اند و پس از 10 s به هم رسیده‌اند پس 10 s ثانیه بعد (یعنی لحظه $t = 20 \text{ s}$) فاصله آن‌ها از هم باز هم 150 m است.

راه حل دوم:

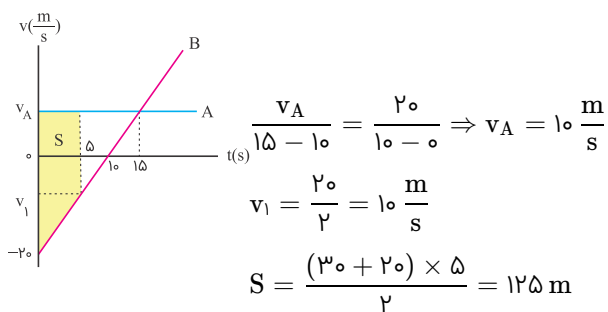
$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{0A} \\ x_B = -|v_B| t + x_{0B} \end{cases} \xrightarrow{v_A = 2|v_B|} \begin{cases} x_A = 2|v_B| t + x_{0A} \\ x_B = -|v_B| t + x_{0B} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_A = x_B &\Rightarrow 2|v_B| t + x_{0A} = -|v_B| t + x_{0B} \\ \Rightarrow 3|v_B| &= x_{0B} - x_{0A} = 150 \\ \Rightarrow |v_B| &= 50 \text{ m/s}, v_A = 100 \text{ m/s} \end{aligned}$$

حال معادله مکان-زمان را برای دو متحرک می‌نویسیم و فاصله آن‌ها را در لحظه $t = 20 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

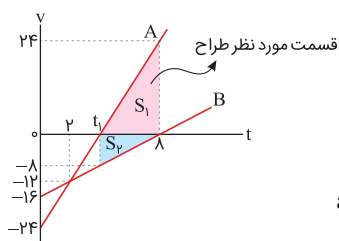
$$\begin{cases} x_A = 100t + x_{0A} \\ x_B = -50t + x_{0B} \end{cases} \xrightarrow{t=20 \text{ s}} \begin{aligned} x_A - x_B &= (100 \times 20 + x_{0A}) - (-50 \times 20 + x_{0B}) \\ \Rightarrow x_A - x_B &= 3000 - 1500 = 1500 \text{ m} \end{aligned}$$

کافی است مساحت سطح محصور بین دو نمودار در بازه صفر تا ۵ ثانیه را حساب کنیم.



چون در $t = 5 s$ به هم رسیده‌اند، فاصله آن‌ها در $t = 0$ برابر $125 m$ است.

بازه زمانی که دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند یعنی مدت زمانی که:



$$\begin{cases} v_A > 0 \\ v_B < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{بازه زمانی } 0 \text{ تا } t_1$$

$$a_A = \frac{-12 - (-24)}{4 - 0} = 6 m/s^2$$

$$a_A = \frac{v_{t_1} - v_0}{t_1 - 0} \Rightarrow 6 = \frac{0 - (-24)}{t_1} \Rightarrow t_1 = 4 s$$

$$a_A = \frac{v_8 - v_0}{8 - 0} \Rightarrow 6 = \frac{v_8 - (-24)}{8} \Rightarrow v_8 = 24 m/s$$

$$a_B = \frac{0 + 16}{4} = 4 m/s^2$$

$$a_B = \frac{v_{t_1} - v_0}{t_1 - 0} \Rightarrow 4 = \frac{v_{t_1} - (-16)}{4} \Rightarrow v_{t_1} = -8 m/s$$

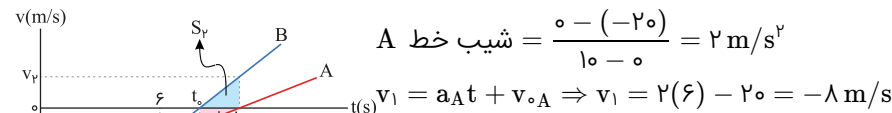
$$a = \frac{v_{7s} - v_0}{7 - 0} \Rightarrow 4 = \frac{v_{7s} - (-16)}{7} \Rightarrow v_{7s} = -12 m/s$$

$$(\text{4 s تا 8 s}) : \Delta x = S_1 + S_2 = \frac{24 \times 4}{2} + \frac{4 \times 8}{2}$$

$$\Delta x = 48 + 16 = 64 m$$

دو متحرک در لحظه $t = 4 s$ بهم می‌رسند و سپس تا لحظه $t = 8 s$ ، ۶۴ متر از هم دور می‌شوند و فاصله بین آن‌ها زیاد می‌شود.

از لحظه t_0 تا ۱۰ ثانیه سرعت متحرک B مثبت و سرعت متحرک A منفی است، یعنی در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. شیب خط A را می‌نویسیم:



$$\text{شیب خط A} = \frac{0 - (-20)}{10 - 0} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v_1 = a_A t + v_{0A} \Rightarrow v_1 = 2(6) - 20 = -8 \text{ m/s}$$

حال برای پیدا کردن v_2 ابتدا شیب خط B را نوشته تا شتاب B را به دست آوریم:

$$\text{شیب خط B} = \frac{-8 - (-32)}{6 - 0} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$v_2 = a_B t + v_{0B} \Rightarrow v_2 = 4 \times 10 - 32 = 8 \text{ m/s}$$

برای پیدا کردن t_0 ، کافی است v_B را برابر صفر قرار دهیم:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \Rightarrow 0 = 4 \times t_0 - 32 \Rightarrow t_0 = 8 \text{ s}$$

سرعت A در t_0 را محاسبه می‌کنیم:

$$v_A = 2 \times 8 - 20 = -8 \text{ m/s}$$

حال اگر مساحت‌های S_1 و S_2 را محاسبه کنیم. برابر فاصله دو متحرک در بازه زمانی است که خلاف جهت هم حرکت می‌کنند:

$$\Delta x = S_1 + S_2 = \left(\frac{(10 - 8) \times (4)}{2} \right) + \left(\frac{8 \times (10 - 8)}{2} \right) = 4 + 8 = 12 \text{ m}$$

برای تعیین تغییر فاصله، علاوه بر جهت حرکت، باید به موقعیت نسبی دو متحرک نیز توجه کرد. در لحظه $t = 8 \text{ s}$ ، متحرک B عقب‌تر از متحرک A قرار دارد. در بازه ۸ تا ۱۰ ثانیه، هر دو متحرک در این بازه به سمت هم حرکت می‌کنند. بنابراین، فاصله بین آن‌ها به اندازه جابجایی نسبی‌شان یعنی ۱۲ متر کاهش می‌یابد.

برای حل این مسئله، ابتدا باید معادلات حرکت (مکان-زمان) هر دو متحرک A و B را به دست آوریم. سپس زمانی را پیدا کنیم که متحرک A در مکان $x = -175 \text{ m}$ قرار دارد و در نهایت، مکان متحرک B را در همان زمان محاسبه کرده و فاصله بین دو متحرک را به دست آوریم. شتاب a_A را با استفاده از شیب خط بدست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-10)}{20} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) t^2 + (-10)t + (-100) \Rightarrow x_A = \frac{1}{4} t^2 - 10t - 100$$

$$\xrightarrow{x_A = -175 \text{ m}} -175 = \frac{1}{4} t^2 - 10t - 100 \Rightarrow -300 = t^2 - 40t$$

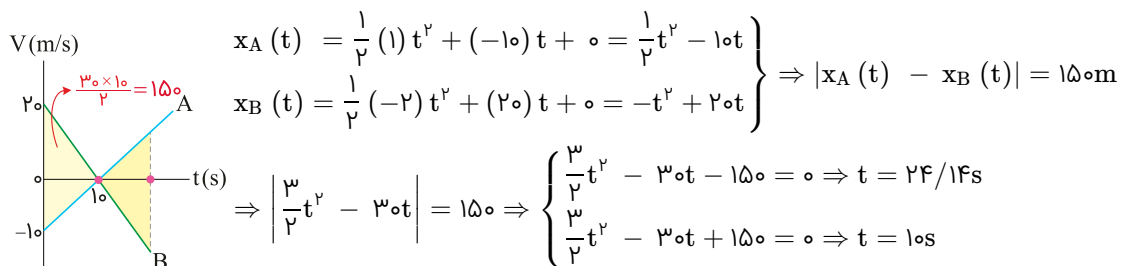
$$\Rightarrow t^2 - 40t + 300 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \text{ s} \\ t_2 = 30 \text{ s} \end{cases}$$

با توجه به اینکه سرعت متحرک B بعد از زمان ۲۰s صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد پس $t_2 = 30 \text{ s}$ قابل قبول است.

$$a_B = \frac{-15}{30} = -0.5 \text{ m/s}^2$$

$$x_B = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) t^2 + (15)t + (100) \xrightarrow{t=30 \text{ s}} x_B = 325 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_B - x_A = 325 - (-175) = 500 \text{ m}$$



باتوجه به اینکه در بازه $(4\text{s}, 12\text{s})$ ، جابه‌جایی دو متحرک باهم برابر است، سرعت متوسط این دو متحرک نیز باهم برابر است.

$$v_{av}(B) = v_A$$

در حرکت شتاب ثابت سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 با سرعت متوسط متحرک در وسط بازه یعنی لحظه $\frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر است.

بنابراین در لحظه $t = \frac{4 + 12}{2} = 8\text{s}$ سرعت متوسط B با سرعت A برابر است.

$$\text{متحرک A: } \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 75 = \frac{1}{2}(1/5)t^2 \Rightarrow t = 10\text{s}$$

$$\text{متحرک B: } \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 150 = \frac{1}{2}a(10)^2 \Rightarrow a_B = 3\text{ m/s}^2$$

$$\left. \begin{aligned} v_A &= at + v_0 = 1/5 \times 10 + 0 = 15\text{ m/s} \\ v_B &= at + v_0 = 3 \times 10 + 0 = 30\text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{30}{15} = 2$$

روش اول:

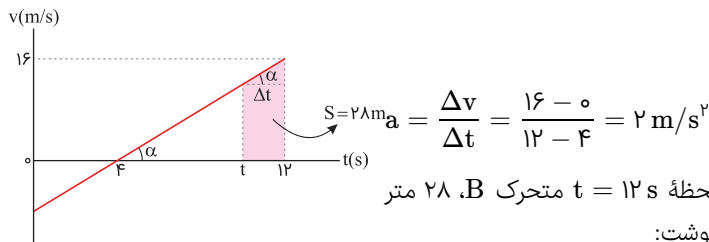
باتوجه به نمودار مکان- زمان داده شده ابتدا تندی متحرک A را حساب می‌کنیم:

$$|v_A| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|64 - 28|}{12} = 3 \text{ m/s}$$

در این صورت تندی متحرک B برابر است با:

$$v_B = \frac{16}{3}|v_A| = \frac{16}{3}(3) = 16 \text{ m/s}$$

اکنون می‌توان نمودار سرعت- زمان مربوط به متحرک B که با شتاب ثابت حرکت می‌کند را رسم کرد:



باتوجه به نمودار، شتاب حرکت برابر است با:

$$S = 28 \text{ m} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16 - 0}{12 - 0} = \frac{4}{3} \text{ m/s}^2$$

باتوجه به نمودار مکان- زمان داده شده مشخص می‌شود از لحظه t تا لحظه $t = 12 \text{ s}$ متحرک B، ۲۸ متر جابه‌جا شده است. پس باتوجه به سطح زیر نمودار مشخص شده می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 28 &= \left(\frac{(16 - 2\Delta t) + 16}{2} \right) \Delta t \\ \Rightarrow 56 &= (32 - 2\Delta t)\Delta t \Rightarrow 56 = 32\Delta t - 2\Delta t^2 \\ \Rightarrow 2\Delta t^2 - 32\Delta t + 56 &= 0 \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ s} \Rightarrow t = 12 - 2 = 10 \text{ s} \end{aligned}$$

در لحظه $t = 10 \text{ s}$ متحرک B از مبدأ عبور کرده و جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند. اکنون مکان متحرک A در این لحظه را حساب می‌کنیم:

$$x_A = vt + x_0 \Rightarrow x_A = -3t + 64 = -3(10) + 64 = 34 \text{ m}$$

چون متحرک B در مبدأ قرار دارد، فاصله دو متحرک برابر ۳۴ m است.
روش دوم:

ابتدا سرعت متحرک A را مشخص کرده و معادله حرکت آن را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{28 - 64}{12} = -3 \text{ m/s} \\ x_A &= v_A t + x_{0A} = -3t + 64 \end{aligned}$$

باتوجه به اطلاعات مربوط به نمودار در مورد متحرک B می‌توان نوشت:

$$\text{در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند} \quad (t = 12 \text{ s}) : v_B = \frac{16}{3}|v_A| = \frac{16}{3}(3) = 16 \text{ m/s}$$

$$4 \text{ s} \leq t \leq 12 \text{ s} : a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16 - 0}{8} = 2 \text{ m/s}^2$$

اکنون باتوجه به مشخص بودن شتاب حرکت، می‌توان سرعت اولیه متحرک B را مشخص کرد:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{0 - v_0}{4} \Rightarrow v_0 = -8 \text{ m/s}$$

با استفاده از معادله مکان- زمان می‌توان مکان اولیه را نیز مشخص کرد:

$$\begin{cases} x_B = t^2 - 8t + x_0 \\ t = 12 \text{ s} \\ x = 28 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow 28 = 144 - 96 + x_0 \Rightarrow x_0 = -20 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_B = t^2 - 8t + 20$$

اکنون می‌توان لحظه تغییر جهت بردار مکان برای متحرک B را مشخص کرد:

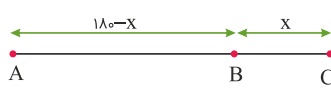
$$x_B = 0 \Rightarrow t^2 - 1t + 20 = 0 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

در این صورت فاصله دو متحرک برابر است با:

$$d = x_A - x_B = (-3t + 64) - 0 = -3(10) + 64 = 34 \text{ m}$$

گزینه ۲

۱۱۱



$$\begin{cases} 180 - x = v_A t \\ x = v_C t \end{cases} \Rightarrow \frac{180 - x}{x} = \frac{v_A}{v_C} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 180 - x = v_C \times 25 \\ x = v_A \times 16 \end{cases} \quad (2) \Rightarrow \frac{180 - x}{x} = \frac{v_C \times 25}{v_A \times 16}$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{v_A}{v_C} = \frac{v_C \times 25}{v_A \times 16} \Rightarrow \frac{v_A^2}{v_C^2} = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{v_A}{v_C} = \frac{5}{4} \xrightarrow{(1)} \frac{180 - x}{x} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4(180) - 4x = 5x \Rightarrow x = 180 \text{ m}$$

حال با جایگذاری $x = 180$ در معادله (۲) مقدار v_A را به دست می‌آوریم:

$$x = v_A \times 16 \Rightarrow 180 = v_A \times 16 \Rightarrow v_A = 11.25 \text{ m/s}$$

گزینه ۴

۱۱۲

در لحظه $t = 0 \text{ s}$ مکان متحرک B برابر $x_B(0) = 0$ است. سرعت اولیه متحرک B برابر $v_B(0) = 12 \text{ m/s}$ است. شتاب ثابت متحرک B را a_B می‌نامیم (مجهول مسئله).

در این مسئله، نمودار مکان-زمان متحرک A را داریم، و مسیر حرکت متحرک B و سرعت اولیه آن را می‌دانیم. هدف محاسبه شتاب ثابت متحرک B است، با توجه به این که دو متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ به هم می‌رسند. ابتدا باید معادله مکان-زمان متحرک A را از روی نمودار استخراج کنیم: در لحظه $t = 0 \text{ s}$ مکان متحرک A برابر $x_A(0) = 20 \text{ m}$ است. در لحظه $t = 3 \text{ s}$ مکان متحرک A برابر $x_A(3) = 26 \text{ m}$ است. با توجه به خطی بودن نمودار، می‌توانیم شیب آن را محاسبه کنیم:

$$\frac{26 - 20}{3 - 0} = 2 \text{ m/s}$$

بنابراین معادله مکان-زمان متحرک A به صورت زیر است:

$$x_A = 2t + 20$$

حالا برای متحرک B داریم:

طبق شرایط مسئله، در لحظه $t = 4 \text{ s}$ دو متحرک به هم می‌رسند، یعنی $x_A(4) = x_B(4)$:

$$x_A = x_B \Rightarrow 2t + 20 = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_0 t + x_0$$

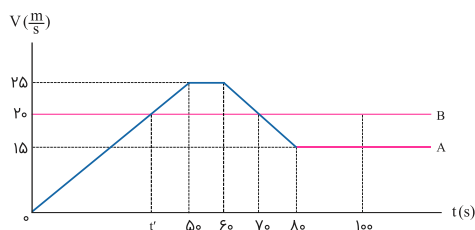
$$\Rightarrow 2 \times 4 + 20 = \frac{1}{2} a_B \times 16 + 12 \times 4 \Rightarrow 28 = 8a_B + 48$$

$$\Rightarrow a_B = -2/5 \text{ m/s}^2$$

باید نشان دهیم مکان هر متحرک در هر لحظه چگونه تغییر می‌کند تا با کمک مکان‌های آن‌ها دور یا نزدیک شدن دو متحرک را تشخیص دهیم: هر دو متحرک در $t = 0$ در $x = 0$ قرار دارند.

با توجه به اینکه شتاب متحرک A در بازه زمانی $(0, 50)$ ثابت است، پس $t' = 40$ s است.

در $t' = 40$ s مکان دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:



$$x_B = vt + x_0 = 20 \times 40 + 0 = 800 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) (40)^2 + 0 = 400 \text{ m}$$

در $t = 50$ s داریم:

$$x_B = 20 \times 50 = 1000 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) (50)^2 = 625 \text{ m}$$

در $t = 60$ s:

$$x_B = 20 \times 60 = 1200 \text{ m}$$

$$x_A = v_A t + x'_0 = 20 \times 10 + 625 = 825$$

در $t = 70$ s:

$$x_B = 20 \times 70 = 1400 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) (10)^2 + 200 + 825 = 1100 \text{ m}$$

در $t = 80$ s:

$$x_B = 20 \times 80 = 1600 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) (10)^2 + 200 + 1100 = 1275 \text{ m}$$

و در آخر در $t = 90$ s:

$$x_B = 20 \times 90 = 1800 \text{ m}$$

$$x_A = v_A t + x''_0 = 10 \times 10 + 1275 = 1375 \text{ m}$$

مشخص است در هر بازه زمانی ۱۰ ثانیه‌ای متحرک B، ۲۰۰ متر جابه‌جا می‌شود ولی متحرک A بیشتر از ۲۰۰ متر جابه‌جا می‌شود پس این دو متحرک هرگز به هم نمی‌رسند.

برای حل این مسئله، ابتدا باید معادلات مکان هر دو متحرک را در بازه‌های مختلف حرکتشان به دست آوریم. سپس، اختلاف مکان آن‌ها را محاسبه کرده و بازه‌های زمانی که این اختلاف کمتر یا مساوی ۱۲ متر است را پیدا کنیم.

$$0 - 6s : \begin{cases} x_A = 2t^2 \\ x_B = t^2 + 68 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 68 \leq 12 \Rightarrow t \leq 4\sqrt{5} \times \\ t^2 - 68 \geq -12 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{4} \times \end{cases}$$

$$6s - 10s : \begin{cases} x_A = 24t'^2 + 72 \\ x_B = t'^2 + 12t + 104 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} -t'^2 + 12t - 32 \leq 12 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ -t'^2 + 12t - 32 \geq -12 \Rightarrow t' = 2s \Rightarrow t = 8s \end{cases}$$

پس از بازه ۸ تا ۱۰ ثانیه (به مدت ۲ ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است.

$$10s - \infty : \begin{cases} x_A = 24t''^2 + 168 \\ x_B = 20t''^2 + 168 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} 4t''^2 \leq 12 \Rightarrow t'' = 1.5s \\ 4t''^2 \geq -12 \Rightarrow t'' = -1.5s \times \Rightarrow t = 10s \end{cases}$$

پس از بازه ۱۰ تا ۱۳ ثانیه (به مدت ۳ ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است. در نتیجه در مجموع ۵ ثانیه (از ۸ ثانیه تا ۱۳ ثانیه) فاصله دو متحرک کمتر از ۱۲ است.

گام اول:

سرعت اولیه هر دو جسم صفر است.

چون دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت می‌کنند و به یک مقصد معین می‌رسند، پس جابه‌جایی آن‌ها یکسان است:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \quad (1)$$

گام دوم: متحرک شماره (۱) که شتاب بیشتری دارد ۲s زودتر به مقصد رسیده، پس:

$$t_1 = t_2 - 2 \quad (2)$$

گام سوم: چون زمان حرکت متحرک شماره (۱) را می‌خواهیم t_2 را از رابطه (۲) در رابطه (۱) قرار می‌دهیم و t_1 را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(1), (2)} a_1 t_1^2 = \frac{9}{16} a \times (t_1 + 2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} = \left(\frac{t_1}{t_1 + 2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{t_1}{t_1 + 2}$$

$$\Rightarrow 4t_1 = 3t_1 + 6 \Rightarrow t_1 = 6s$$

از آنجایی که از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند آن متحرکی که شتاب بیشتری دارد زودتر می‌رسد.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{25}\right) a_1 (t + 5)^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{4}{5} (t + 5) \Rightarrow t = 20s$$

در لحظه $t = ۶ \text{ s}$:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \int_0^t a_A t_A^v dt_A = \int_0^t a_B t_B^v dt_B \Rightarrow a_A t_A^v = a_B t_B^v \Rightarrow a t_A^v = (a + o/\omega)(t_A - v)^v$$

$$\Rightarrow ۳۶a = (a + o/\omega)(۱۶) \Rightarrow ۳۶a = ۱۶a + \lambda \Rightarrow a = o/۴ \text{ m/s}^v$$

$$\begin{cases} t = ۱۰ \text{ s} \text{ در } : x_A = \frac{1}{v} (o/۴)(۱۰)^v + \cancel{y_o^o} t = ۲۰ \text{ m} \\ t = \lambda \text{ s} \text{ در } : x_B = \frac{1}{v} (o/۴ + o/\omega)(۶۴) + \cancel{y_o^o} t = ۲\lambda/\lambda \text{ m} \end{cases}$$

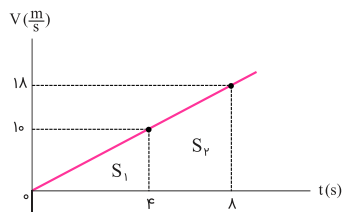
$$\Rightarrow \Delta x_{AB} = ۲\lambda/\lambda - ۲۰ = \lambda/\lambda \text{ m}$$

برای محاسبه سرعت متوسط دو متحرک ابتدا نمودار سرعت - زمان را رسم کرده سپس نسبت جابه‌جایی آن‌ها در Δt اول حرکت را مقایسه می‌کنیم:
متحرک A:

$$v = at + v_0$$

$$v_{fs} = 2/5 \times 5 + 0 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{\Delta t} = 2 \times 5 + 0 = 10 \text{ m/s}$$



$$\Delta x_A = S_1 + S_2 = \left(\frac{5 \times 10}{2} \right) + \left(\frac{10 + 18}{2} \times 5 \right)$$

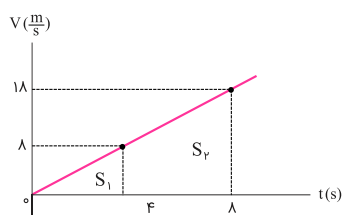
$$\Delta x_A = 20 + 56 = 76 \text{ m}$$

متحرک B:

$$v = at + v_0$$

$$v_{fs} = 2 \times 5 + 0 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{\Delta t} = 2/5 \times 5 + 10 = 12 \text{ m/s}$$



$$\Delta x_B = S_1 + S_2 = \left(\frac{5 \times 10}{2} \right) + \left(\frac{10 + 18}{2} \times 5 \right)$$

$$\Delta x_B = 25 + 56 = 81 \text{ m}$$

حال خواسته سوال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\bar{v}_B}{\bar{v}_A} = \frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} = \frac{81}{76} = \frac{17}{16}$$

طبق صورت سوال، فاصله دو متحرک از هم ۵ m است و متحرک دوم ۷ m از متحرک اول جلوتر است، با در نظر گرفتن مکان متحرک اول به عنوان مبدأ مکانی داریم:



$$| \underbrace{\Delta x_1}_{\text{حرکت یکنواخت}} - \underbrace{\Delta x_2}_{\text{حرکت شتابدار}} | \Rightarrow | vt - (\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0) | = 5$$

$$\Rightarrow | 8t - (\frac{1}{2} \times 2 \times t^2 - 7) | = 5 \Rightarrow | 8t - t^2 - 7 | = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8t - t^2 - 7 = 5 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2s \\ t = 6s \end{cases} \\ 8t - t^2 - 7 = -5 \Rightarrow t^2 - 8t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 + \sqrt{14} \\ t = 4 - \sqrt{14} \end{cases} \end{cases}$$

برای حل این تست باید از زمانی که دو متحرک هم سرعت می‌شوند تا زمانی که هم‌مکان می‌شوند را پیدا کنیم. ابتدا معادلات سرعت هر دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} v_1(t) &= a_1 t = 0/5t \\ v_2(t) &= a_2 t = 2(t - 3) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{v_1(t)=v_2(t)} 0/5t = 2(t - 3)$$

$$\Rightarrow 1/5t = 6 \Rightarrow t = 3s$$

پس دو متحرک در $t = 3s$ هم‌سرعت می‌شوند. در این لحظه، سرعت هر دو متحرک ۲ متر بر ثانیه است. موقعیت متحرک‌ها در لحظه هم‌سرعت شدن در $t = 3s$:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1(t)^2 = 0/2 \times 5(3)^2 = 3m$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - 3)^2 = (3 - 3)^2 = 0m$$

بنابراین در لحظه هم‌سرعت شدن، متحرک اول ۳ متر جلوتر است.

برای تعیین زمان برخورد (هم‌مکان شدن دو متحرک)، معادله $x_1(t) = x_2(t)$ را حل می‌کنیم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 0/2 \times 5t^2 = 2(t - 3)^2 \Rightarrow t^2 = 4(t - 3)^2$$

$$\Rightarrow t = 2(t - 3) \Rightarrow t = 6s$$

تحلیل حرکت:

تا قبل از $t = 3s$: چون سرعت متحرک دوم کمتر از متحرک اول است، فاصله افزایش می‌یابد.

در $t = 3s$: سرعت‌ها برابر می‌شوند و فاصله به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

بعد از $t = 3s$: سرعت متحرک دوم بیشتر می‌شود، بنابراین فاصله کاهش می‌یابد.

در $t = 6s$ دو متحرک به هم می‌رسند و فاصله صفر می‌شود.

بنابراین فاصله از $t = 3s$ تا $t = 6s$ در حال کاهش است، یعنی به مدت ۳ ثانیه.

ابتدا مکان و سرعت اتومبیل A را در $t = ۳ \text{ s}$ محاسبه می‌کنیم:

$$v_A = at + v_0 \Rightarrow ۲ \times ۳ + ۰ = ۶ \text{ m/s}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = ۹ \text{ m}$$

لحظه $t = ۳ \text{ s}$ را به عنوان مبدأ زمان در نظر می‌گیریم و معادله مکان - زمان در اتومبیل را می‌نویسیم:

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = t^2 + ۶t + ۹$$

$$x_B = v_Bt = ۱۶t$$

چون $t = ۳ \text{ s}$ را مبدأ حرکت در نظر گرفتیم پس بازه مورد نظر سوال $t = ۴ \text{ s}$ تا $t = ۶ \text{ s}$ است. حال در هر لحظه مکان دو اتومبیل را به دست می‌آوریم:

$$t = ۴ \text{ s} : \begin{cases} x_A = ۱۶ + ۲۴ + ۹ = ۴۹ \text{ m} \\ x_B = ۱۶ \times ۴ = ۶۴ \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۱۵ \text{ m}$$

$$t = ۵ \text{ s} : \begin{cases} x_A = ۲۵ + ۳۰ + ۹ = ۶۴ \text{ m} \\ x_B = ۱۶ \times ۵ = ۸۰ \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۲۴ \text{ m}$$

$$t = ۶ \text{ s} : \begin{cases} x_A = ۳۶ + ۳۶ + ۹ = ۸۱ \text{ m} \\ x_B = ۱۶ \times ۶ = ۹۶ \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۱۵ \text{ m}$$

پس فاصله دو اتومبیل ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش پیدا کرده است.

ابتدا در مدت ۱۱ s جابه‌جایی دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_A = vt = ۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰ \text{ m}$$

$$\begin{cases} \Delta x_{AB} = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2} \times ۲ \times ۵^2 + ۲ \times ۵ = ۳۵ \text{ m} \\ \Delta x_{PB} = vt_P = (+at_1 + v_0)t_P = (+۲ \times ۵ + ۲)(۱۱ - ۵) = ۷۲ \text{ m} \end{cases}$$

$$\Delta x_B = \Delta x_{AB} + \Delta x_{PB} = ۱۰۷ \text{ m}$$

حال می‌توانیم با مساوی قرار دادن مسافت‌های پیموده شده لحظه رسیدن دو متحرک به یکدیگر و همچنین اندازه سرعت آن‌ها را محاسبه کنیم:

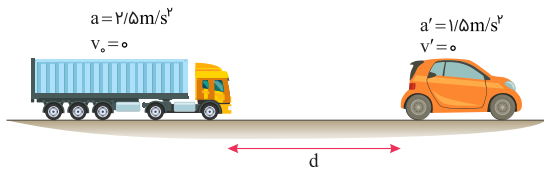
$$\left. \begin{aligned} x_B &= vt = ۱۲t \\ x_A &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x_A &= \frac{1}{2}(-۲)t^2 + ۱۰t + ۳ \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$-t^2 + ۱۰t + ۳ = ۱۲t \Rightarrow t^2 + ۲t - ۳ = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \\ t = -۳ \end{cases}$$

$$v_B = ۱۲ \text{ m/s}$$

$$v_A = -at + v_0 = -۲ \times ۱ + ۱۰ = ۸ \text{ m/s}$$

$$v_B - v_A = ۱۲ - ۸ = ۴ \text{ m/s}$$



مبدأ مختصات را محل کامیون در نظر می‌گیریم:

$$x_o = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t + x_o \Rightarrow x_o = \frac{1}{2} a' t^2 + d = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} t^2 + d = \frac{3}{4} t^2 + d$$

$$x_k = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t + x_o \Rightarrow x_k = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} t^2 = \frac{5}{4} t^2$$

لحظه به هم رسیدن اتومبیل و کامیون:

$$x_o = x_k \Rightarrow \frac{5}{4} t^2 = \frac{3}{4} t^2 + d \Rightarrow d = \frac{1}{2} t^2 \quad (1)$$

از طرفی وقتی اتومبیل ۷۵ متر را طی می‌کند، کامیون از آن سبقت می‌گیرد، پس:

$$\Delta x = \frac{3}{4} t^2 \Rightarrow 75 = \frac{3}{4} t^2 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = 10 \text{ s} \quad (2)$$

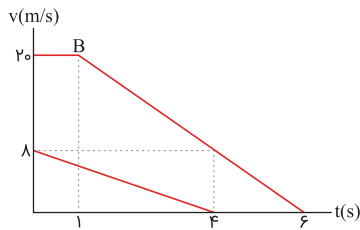
$$\xrightarrow{(2), (1)} d = \frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ m}$$

در لحظه $t = 15 \text{ s}$:

$$\left. \begin{aligned} x_o &= \frac{3}{4} \times (15)^2 + 50 = 218.75 \\ x_k &= \frac{5}{4} \times (15)^2 = 281.25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 281.25 - 218.75 = 62.5$$

نمودار $v - t$ هر دو متحرک را رسم می‌کنیم:

شتاب حرکت خودرو A، -۲ m/s^2 است پس محور زمان را در $t = ۴ \text{ s}$ قطع می‌کند. خودروی B، یک ثانیه حرکت یکنواخت دارد و پس از آن با شتاب -۴ m/s^2 حرکت می‌کند پس محور زمان را در $t = ۶ \text{ s}$ قطع می‌کند.



$$\begin{aligned} \Delta x_B = \Delta x_A = ۴۶ &\Rightarrow (v_B t_B + \frac{1}{2} a_B (t'_B)^2 + v_{0B} t'_B) = (\frac{1}{2} a_A t_A^2 + v_{0A} t_A) = ۴۶ \\ &\Rightarrow (20 \times 1 + \frac{1}{2} (-4)(t-1)^2 + 20(t-1)) - (\frac{1}{2} (-2)t^2 + 8t) = ۴۶ \\ &\Rightarrow 20 - 2t^2 - 2 + 4t + 20t - 20 + t^2 - 8t - 46 = 0 \\ &\Rightarrow -t^2 + 16t - 48 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 12 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow \text{لحظه رسیدن} \end{aligned}$$

سرعت خودروی B در لحظه رسیدن خودروی A را از ما می‌خواهد پس:

$$v_B = at' + v_{0B} \Rightarrow v_B = -4 \times (t-1) + 20 = -4 \times 3 + 20 = 8 \text{ m/s}$$

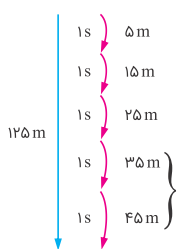
روش اول: ابتدا مدت سقوط گلوله را به دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -۱۲۵ = -5t^2 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

بنابراین سرعت متوسط در دو ثانیه آخر، یعنی سرعت متوسط در بازه $(3 \text{ s}, 5 \text{ s})$. چون حرکت با شتاب ثابت است، سرعت در وسط این بازه، برابر سرعت متوسط است. پس:

$$v_{av}(3 \text{ s}, 5 \text{ s}) = v_{fs} = -gt = -10(۴) = -۴۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

چون طبق قرارداد کتاب درسی، جهت مثبت محور به سمت بالا است، باید گزینه‌ها منفی می‌بودند، اما متأسفانه رعایت نشده است. روش دوم:

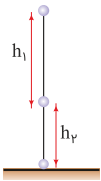


$$\Rightarrow v_{av} = \frac{-10}{2} = -۴۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

فقط نیروی وزن روی جسم کار انجام می‌دهد بنابراین کار انجام شده در ثانیه آخر حرکت برابر با کار نیروی وزن گلوله است:

$$W = mgh_v \Rightarrow 70 = 0.2 \times 10 \times h_v \Rightarrow h_v = 35 \text{ m}$$

حال به دو روش می‌توانیم پاسخ سؤال را ادامه دهیم:
* ادامه پاسخ از روش اول:



جهت بالا را مثبت و مبدأ مکان را محل رها شدن جسم فرض می‌کنیم.
معادله حرکت سقوط آزاد را یکبار برای کل مسیر و یکبار برای قسمت اول مسیر می‌نویسیم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{کل مسیر: } h = -\frac{1}{2}(-10)t^2 = 5t^2 & (1) \\ (t-1)\text{s از ابتدا تا لحظه } h_v: h_1 = h - h_v = -\frac{1}{2}(-10)(t-1)^2 = 5(t-1)^2 & (2) \end{cases}$$

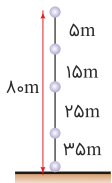
$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو رابطه (1) و (2)}} h - (h - h_v) = 5t^2 - 5(t-1)^2 = 5t^2 - 5(t^2 - 2t + 1) = 10t - 5$$

$$\xrightarrow{h_v = 35 \text{ m}} 35 = 10t - 5 \Rightarrow t = 4 \text{ s} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(3) \Rightarrow (2)} h - 35 = 5(4-1)^2 \Rightarrow h = 35 + 45 = 80 \text{ m}$$

** ادامه پاسخ از روش دوم:

در سقوط آزاد مسافت طی شده در هر ثانیه، تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت ۱۰ می‌دهد و جمله اول تصاعد $\frac{g}{2}$ است. در این سؤال مسافت طی شده در ثانیه آخر را به دست آوردیم، داریم:



ابتدا زمان کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 80 = -\frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

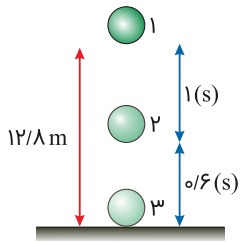
پس ۰/۶ s قبل از رسیدن یعنی زمان $t' = 3/4 \text{ s}$ ، مکان گلوله در این لحظه را حساب کرده و از ۸۰ متر کم می‌کنیم:

$$\Delta y' = -\frac{1}{2}g(t')^2 \Rightarrow \Delta y' = -\frac{1}{2}(10)(3/4)^2 = 57/8$$

$$80 - 57/8 = 22/2 \text{ m}$$

محاسبه زمان کل سقوط سنگ تا رسیدن به زمین:

$$۱ \rightarrow ۳: \Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0.t \Rightarrow ۱۲/۸ = \frac{1}{2}(۱۰)t^2 \Rightarrow ۱۲/۸ = ۵t^2 \Rightarrow t^2 = ۲/۵۶ \Rightarrow t = \sqrt{۲/۵۶} = ۱/۶s$$

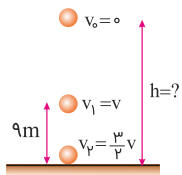


محاسبه مدت زمانی که سنگ ۱/۶ ثانیه قبل از رسیدن به زمین است: اگر زمان کل سقوط ۱/۶ ثانیه باشد، ۰/۶ ثانیه قبل از رسیدن به زمین، یعنی مدت زمان یک ثانیه. پس مسافت طی شده از این لحظه به بعد را محاسبه می‌کنیم:

$$۱ \rightarrow ۲: \Delta y' = \frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow \Delta y' = \frac{1}{2}(۱۰)(۱)^2 \Rightarrow \Delta y' = ۵m$$

این به این معنی است که در مدت زمان ۱/۰ ثانیه، سنگ ۵ متر از نقطه رها شدن (ارتفاع اولیه) پایین آمده است. محاسبه ارتفاع سنگ از سطح زمین در آن لحظه: ارتفاع اولیه سنگ ۱۲/۸ متر بوده است. سنگ ۵ متر پایین آمده است. پس:

$$۱۲/۸ - ۵ = ۷/۸m$$



جهت بالا را مثبت و مبدأ را محل رها شدن گلوله فرض می‌کنیم.

معادله مستقل از زمان در حرکت سقوط آزاد را یک‌بار برای قسمت اول و بار دیگر برای کل مسیر می‌نویسیم:

$$v_1^2 = -2g(y_1 - y_0) \Rightarrow v^2 = -2 \times ۱۰ \times [-(h - ۹) - ۰] \Rightarrow v^2 = -۲۰ \times (-h + ۹) \quad (۱)$$

$$v_r^2 = -2g(y_r - y_0) \Rightarrow \left(\frac{3}{4}v\right)^2 = -2 \times ۱۰ \times (-h - ۰) \Rightarrow \frac{9}{4}v^2 = -۲۰ \times (-h) \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)-(۱)} \frac{9}{4}v^2 - v^2 = -۲۰[(-h) - (-h + ۹)] \Rightarrow \frac{5}{4}v^2 = -۲۰ \times (-۹) \Rightarrow \frac{5}{4}v^2 = ۱۸۰ \Rightarrow v^2 = ۱۴۴ m^2/s^2$$

با جایگذاری مقدار v^2 در رابطه (۲) داریم:

$$\frac{9}{4}v^2 = -۲۰ \times (-h) \xrightarrow{v^2=۱۴۴ m^2/s^2} \frac{9}{4} \times (۱۴۴) = ۲۰h \Rightarrow h = ۱۶/۲m$$

نیم ثانیه سوم بین دو لحظه $t_1 = 1$ s و $t_2 = 1/5$ s است. در این صورت برای محاسبه سرعت متوسط در این بازه می‌توان نوشت:

$$v_1 = -gt_1 \Rightarrow v_1 = -g$$

$$v_2 = -gt_2 \Rightarrow v_2 = -1/5g$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{-g + (-1/5g)}{2} = -1/25g = -1/25 \times 9/8 = -12/25 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow |v_{av}| = 12/25 \text{ m/s}$$

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ ، تندی گلوله، هنگام برخورد به زمین را (v) به دست می‌آوریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 24/2 = \frac{1}{2} \times 0/1 \times v^2 \Rightarrow v^2 = 484 = 4 \times 121$$

$$\Rightarrow v = 2 \times 11 = 22 \text{ m/s}$$

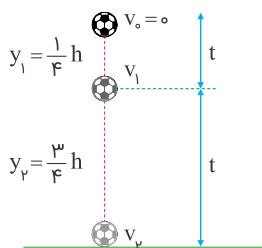
گام دوم: یک ثانیه قبل از برخورد به زمین تندی گلوله به اندازه $a = g = 10 \text{ m/s}^2$ کمتر از لحظه برخورد به زمین است و برابر است با:

$$v_1 = v - g = 22 - 10 = 12 \text{ m/s}$$

گام سوم: سرعت متوسط در ثانیه آخر برابر با میانگین سرعت‌های ابتدا و انتهای این بازه یعنی $\frac{v_1 + v}{2}$ است؛ پس:

$$v_{av} = \frac{v + v_1}{2} = \frac{22 + 12}{2} = 17 \text{ m/s}$$

چون حرکت از حال سکون و با شتاب ثابت انجام شده است و $y_2 = 3y_1$ است، یعنی بازه‌های زمانی حرکت باهم برابر است. پس می‌توان نوشت:

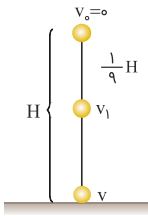


$$|v_1| = gt$$

$$|v_2| = g(2t) = 2v_1$$

در این صورت برای محاسبه تندی متوسط داریم:

$$S_{av} = v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 + 2v_1}{2} = \frac{3}{2}v_1 = 10 \text{ m/s}$$

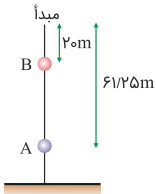


$$v_{av} = \frac{v_1 + v_o}{2} \Rightarrow v_1 = 2v_{av} = 2 \times \frac{4}{9} \Rightarrow v_1 = g$$

$$\left(\frac{v}{v_1}\right)^2 = \frac{H}{\frac{1}{9}H}$$

$$\frac{v}{g} = 3 \Rightarrow v = 3g = \frac{29}{4} \text{ m/s}$$

بهترین راه حل این است که در نظر بگیریم گلوله A به مدت $\frac{3}{5}$ s و گلوله B به مدت ۲ s سقوط کرده اند.

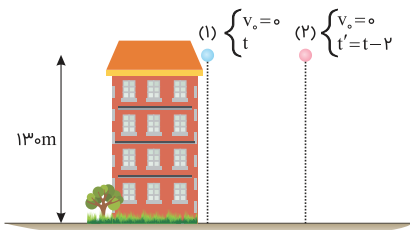


$$|h_A| = \left| -\frac{1}{2}gt^2 \right| = \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{61}{25} \text{ m}$$

$$|h_B| = \left| -\frac{1}{2}gt^2 \right| = \frac{1}{2} \times 10 \times (2)^2 = 20 \text{ m}$$

$$\Delta h = |h_A - h_B| = \frac{61}{25} - 20 = \frac{1}{25} \text{ m}$$

گلوله دوم ۲ ثانیه دیرتر از گلوله اول رها می شود. طبق رابطه $y = -\frac{1}{2}gt^2$ برای هر دو گلوله داریم:



$$\begin{cases} y_A = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 10 \times (5)^2 = -125 \text{ m} \\ y_B = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = -45 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta y = |y_A - y_B| = 125 - 45 = 80 \text{ m}$$

بیا باید یک سیستم مختصات تعریف کنیم که محور عمودی آن به سمت بالا است و مبدأ آن روی سطح زمین است. فرض می‌کنیم لحظه شروع را با $t = 0$ نشان می‌دهیم، یعنی لحظه رها شدن گلوله اول.

گلوله اول در $t = 0$ از ارتفاع h رها می‌شود و در زمان رها شدن گلوله سوم، یعنی در لحظه $t = 4s$ به زمین می‌رسد. پس زمان رسیدن گلوله اول به زمین ۴ ثانیه است. ابتدا باید ارتفاع اولیه h را به دست آوریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + h \xrightarrow{y=0} h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 16 = 80m$$

گلوله اول در $t = 0$ از ارتفاع h رها می‌شود. گلوله دوم در $t = 2s$ از ارتفاع h رها می‌شود. گلوله سوم در $t = 4s$ از ارتفاع h رها می‌شود. گلوله دوم معادله سقوط آزاد را از زمان $t = 2s$ دنبال می‌کند. پس موقعیت آن در لحظه $t = 4s$ برابر است با:

$$y_2(t = 4s) = -\frac{1}{2}g(4 - 2)^2 + h = -\frac{1}{2} \times 10 \times 4 + 80 = 60m$$

بنابراین گلوله دوم در لحظه $t = 4s$ از ارتفاع ۶۰ متری عبور می‌کند.

باید محاسبه کنیم در لحظه رها کردن گلوله B، گلوله A در چند متری است.

$$t = 1s : \Delta y_A = \frac{1}{2} \times 10 \times (1)^2 = 5m$$

پس در لحظه حرکت گلوله B، گلوله A به اندازه ۵ متر عقب‌تر است اما یک ثانیه پس از آن گلوله B عقب‌تر می‌افتد چون گلوله A سرعت بیشتری دارد. پس ابتدا فاصله دو گلوله کاهش می‌یابد اما پس از آن افزایش می‌یابد.

فرض می‌کنیم مبدأ مختصات را در نقطه رها شدن گلوله‌ها قرار دهیم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین در نظر بگیریم. معادله مکان در حرکت با شتاب ثابت (سقوط آزاد با سرعت اولیه صفر) به صورت زیر است:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = 5t^2$$

$$h' = \frac{1}{2}g(t - 1)^2 \Rightarrow h' = 5t^2 - 10t + 5$$

$$h - h' = 10t - 5$$

معادله بالا شبیه به معادله مکان-زمان در حرکت با سرعت ثابت است ($x = vt + x_0$) بنابراین فاصله در هر ثانیه ۱۰ متر افزایش می‌یابد.

روش کلاسیک:

ابتدا سرعت گلوله در نقطه C را حساب می‌کنیم.

$$\Delta y_{B,C} = \frac{v_C + v_B}{2} \Delta t \xrightarrow{v_C = -gt + v_B} -90 = \frac{2v_C + 30}{2} \times 3 \Rightarrow v_C = -45 \text{ m/s}$$

حالا سرعت برخورد گلوله به سطح زمین را حساب می‌کنیم:

$$v_{\text{زمین}}^2 - v_C^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v_{\text{زمین}}^2 - (-45)^2 = -20(-50) \Rightarrow v_{\text{زمین}} = +55 \text{ m/s}$$

سه ثانیه قبل از برخورد گلوله به زمین سرعت گلوله برابر $v = -gt + v_{\text{زمین}} = -30 + 55 = +25 \text{ m/s}$ است پس ارتفاع آن از سطح زمین برابر است با:

$$\Delta y = \frac{v + v_{\text{زمین}}}{2} \times \Delta t = \frac{25 + 55}{2} \times 3 = 120 \text{ m} \Rightarrow h = \Delta y = 120 \text{ m}$$

روش دوم:

