پکیج: ۹۹۹ تست

نام آزمون: آزمون جامع

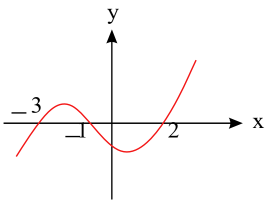
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی

۱ - حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{۲}+۴x+۳=\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}$ کدام است؟

① -۲ ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۲ - شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)\,f(x)}$ کدام است؟



① $[-۳,۲]$ ② $[-۱,+\infty)$ ③ $(-\infty,-۱]$ ④ $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۳ - نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin^{۲}x-۲\sin x\,;\,x\in[۰,۲\pi]$ ، در کدام بازه صعودی است و تقعر آن رو به پایین است؟

① $(\frac{۷\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲})$ ② $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۱۱\pi}{۶})$ ③ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۶})$ ④ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۶})$

۴ - اگر $f(x)=۴-۳^{۲x}$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf^{-۱}(x)}$ ، کدام است؟ (با تغییر)

① $[۲,۳]$ ② $[۳,۴)$ ③ $[۰,۳]$ ④ $[۰,۴)$

۵ - به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=(۱-a)x^{۲}+۲\sqrt{۶}x-a$ ، همواره بالای محور xها است؟

① $a<۱$ ② $a<-۲$ ③ $a>۳$ ④ $-۲<a<۱$

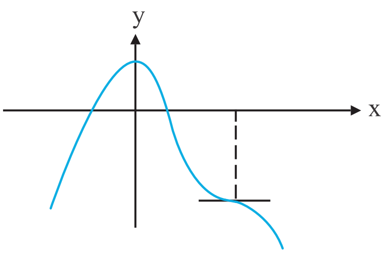
۶- اگر $f(x)=\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^{۲}}$ باشند، دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

① $[۰,۱]$ ② $[-۱,۱]$ ③ $\mathbb{R}$ ④ $\mathbb{R}-(-۱,۱)$

۷- اگر $f(x)=x+|x|$ و $g(x)=|x+۱|+۱$؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$، کدام است؟

① $[۰,۱)$ ② $[۰,۲)$ ③ $[۰,+\infty)$ ④ $[۱,+\infty)$

۸ - شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=-x^{۴}+۸x^{۳}+ax^{۲}+b$ است، a کدام است؟

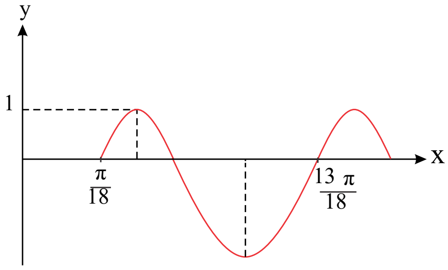


① -۱۸
② -۱۵
③ -۱۲
④ -۹

۹ - تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع fog ، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

① ۴ و $\frac{۱}{۹}$ ② ۹ و $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۴}$ و ۴ ④ ۴ و ۹

۱۰ - شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a - 2\cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a+b$ کدام است؟

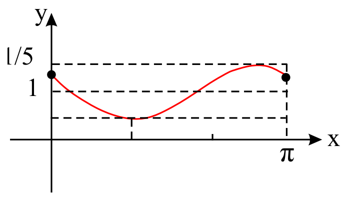


① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{3}{2}$
④ 2

۱۱ - اگر $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

① -8 ② -6 ③ 4 ④ 5

۱۲ - شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a+b$ کدام است؟



① $\frac{1}{2}$ ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2

۱۳ - حاصل $\frac{1}{\cos 15^\circ} - \frac{1}{\sin 15^\circ}$، کدام است؟

① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$

۱۴ - حد عبارت $\frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$، وقتی $x \to 0$ کدام است؟

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2

۱۵ - تابع به ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & ; \quad x \notin Z \\ a & ; \quad x \in Z \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

① -1 ② 1 ③ 0 ④ همواره ناپیوسته

۱۶ - اگر تابع f در $x = 4$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)+7}{x-4} = \frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$، کدام است؟

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$

۱۷ - نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x ; x \in [0, 2\pi]$، در کدام بازه، نزولی است و تقعر آن رو به پایین است؟

① $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ ② $(\pi, \frac{4\pi}{3})$ ③ $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ ④ $(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$

۱۸ - اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

① $(0, 5) \cup [20, 25)$ ② $[-5, 0) \cup (15, 20]$ ③ $(15, 20]$ ④ $[-5, 0)$

۱۹ - مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

① $\frac{3\pi}{4}$ ② $\frac{5\pi}{4}$ ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{4}$

۲۰ـ حدّ عبارت $\sin\frac{x}{2}[\cos\frac{x}{2}]-\cos x[\sin 2x]$ وقتی $x\to\pi$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

① -1 ② صفر ③ 1 ④ حدّ ندارد.

۲۱ـ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<x<a\\ 1-\frac{x}{4} & x\geq a\end{cases}$، همواره پیوسته است؟

① 1 ② 2 ③ 3 ④ هیچ مقدار a

۲۲ـ امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ با نیمساز ربع سوم زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

① $0/15$ ② $0/2$ ③ $0/25$ ④ $0/3$

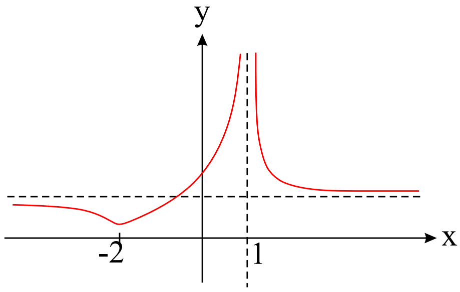
۲۳ـ تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\frac{3}{2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در $x=2$ کدام است؟

① $2/5$ ② 3 ③ $3/5$ ④ 4

۲۴ـ طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

۲۵ـ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+a}{x^2+bx+c}$ است. a کدام است؟

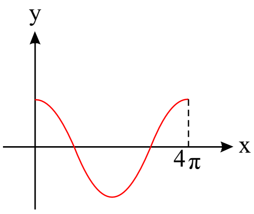


① -2
② 1
③ 2
④ 3

۲۶ـ به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$، دارای دو ریشهٔ مثبت است؟

① $-2<a<2$ ② $2<a<5$ ③ $2<a<14$ ④ $5<a<14$

۲۷ـ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{1}{2}+2\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{16\pi}{3}$، کدام است؟



① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$
③ 1 ④ صفر

۲۸ـ به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می‌باشد؟

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

۲۹ـ اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$، دامنهٔ تابع gof، کدام است؟

① $[0,1)$ ② $\{0\}$ ③ $(-1,1)$ ④ $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

۳۰ـ اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\sqrt{3x+4}>2\,|x-1|-x$، بازهٔ (a,b) باشد، طول وسط این بازه، کدام است؟

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4

۳۱- مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$، در بازه $[0, \pi]$، برابر کدام است؟

① $\frac{7\pi}{4}$ ② $\frac{9\pi}{4}$ ③ $\frac{5\pi}{2}$ ④ $\frac{11\pi}{3}$

۳۲- حدّ عبارت $[\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x]$، وقتی $x \to \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ ([ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۳- تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x^2]$، در بازهٔ $[-1, 2]$، کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۳۴- حدّ عبارت $\frac{1}{x^2}\left(1 - x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)$ وقتی $x \to 0$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

① صفر ② ۱ ③ ∞ ④ حدّ ندارد

۳۵- طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (5 - x)\sqrt[3]{x^2}$، کدام است؟

① -1 ② صفر ③ ۱ ④ ۲

۳۶- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② ۱ ③ $\sqrt[3]{2}$ ④ $\sqrt{2}$

۳۷- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

① $m > 1$ یا $m < -2$ ② $-2 < m < 1$ ③ فقط $m < -2$ ④ فقط $m > 1$

۳۸- جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan 3x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$، به کدام صورت است؟

① $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ ② $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ ③ $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ ④ $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۳۹- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} & ; \ x > 3 \\ ax - 3a - \frac{3}{8} & ; \ x \leq 3 \end{cases}$ ، در نقطه $x = 3$ پیوسته است؟

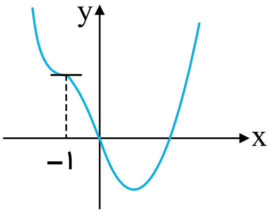
① -2 ② ۲ ③ هیچ مقدار a ④ هر چه باشد a

۴۰- حاصل $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cot x$ ، کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① -1 ② صفر ③ ۱ ④ حد ندارد.

۴۱- اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع $f(x) = [2 + \cos\frac{x}{2}] \sin 2x$ در $x = \pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{2}{5}$



۴۲ – شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx$ است، b کدام است؟

① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8

۴۳ – به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

① $m>2$ ② $-1<m<2$ ③ هر مقدار m ④ هیچ مقدار m

۴۴ – ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویهٔ رویت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° درجه است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan 40^\circ = 0{,}8)$

① ۶ ② ۶٫۴ ③ ۷ ④ ۷٫۲

۴۵ – به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x} & x>2\\ x-a & x\leq 2\end{cases}$ همواره پیوسته است؟

① ۱٫۲ ② ۱٫۶ ③ ۲٫۴ ④ ۳٫۲

۴۶ – حاصل $\lim\limits_{x\to 0}([2x]+[-2x])\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}$، کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

① -3 ② ۳ ③ صفر ④ حد ندارد.

۴۷ – کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟

① $f(x)=x+\sqrt{x}$ ② $g(x)=x-\sqrt{x}$ ③ $h(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ ④ $p(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

۴۸ – حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\dfrac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$، کدام است؟

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$

۴۹ – اگر $f(x)=\sqrt{x^2-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$، کدام است؟

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{5}{2}$

۵۰ – تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-[x]}{x^3-x-6} & ;\ x\neq 2\\ a & ;\ x=2\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در بازهٔ $[2,3)$ پیوسته است؟

① $\dfrac{1}{11}$ ② $\dfrac{1}{9}$ ③ $\dfrac{1}{8}$ ④ $\dfrac{1}{6}$

۵۱ – تعداد نقاط ناپیوسته نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+4}}{1+\sqrt[3]{x+1}}+\dfrac{1}{x+5}$، کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۵۲ – خط راستی بر نمودار تابع $y=x^3-2x^2+3x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند. شیب این خط، کدام است؟

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ $\dfrac{5}{3}$

۵۳- خط قائم بر نمودار $f(x)=\dfrac{\cos ۲x}{۲-\sin x}$، در نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها، نیمساز ناحیهٔ اول را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۱) ۰٫۱ (۲) ۰٫۲ (۳) ۰٫۳ (۴) ۰٫۵

۵۴- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم است. به‌ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x)=f(۴-x^۲)$ است. اگر $f'(۱)=-۵$ و $f''(۱)=-۱$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{۳})$، کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۵- حدّ عبارت $\dfrac{۱-\cos\sqrt{x}}{x}$، وقتی $x\to ۰^+$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ (۳) $\dfrac{۱}{۲}$ (۴) ۱

۵۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]\cos ۴x & ;\ |x|\le \frac{\pi}{۲}\\ a & ;\ x=۰\end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در $x=۰$ پیوسته است؟

(نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) همواره ناپیوسته

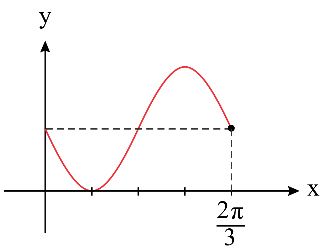
۵۷- اگر θ زاویهٔ بین دو مماس چپ و راست در نقطه گوشه نمودار تابع $y=\dfrac{|x-۱|}{\sqrt{x^۲+۳}}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۲}{۳}$ (۲) $\dfrac{۳}{۴}$ (۳) $\dfrac{۴}{۳}$ (۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۵۸- اگر تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to۰}\dfrac{f(-۲+h)+۳}{h}=\dfrac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $x^۲f(x)$ در $x=-۲$ ، کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۵۹- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=۱-\sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\dfrac{۷\pi}{۶}$ ، کدام است؟



(۱) صفر (۲) $\dfrac{۱}{۲}$ (۳) ۱ (۴) ۲

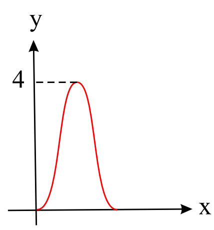
۶۰- نمودارهای دو تابع $f(x)=۴^x$ و $g(x)=(\dfrac{۱}{۲})^{۲x}+\dfrac{۳}{۲}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ $(-\dfrac{۱}{۲}\,,\,۱)$، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{۲}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{۵}$

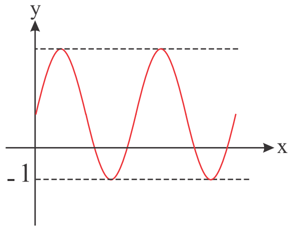
۶۱- به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۸x^۲-mx-۸=۰$ ، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ می‌باشد؟

(۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۶۲- شکل زیر نمودار تابع $y=a+b\cos(\dfrac{\pi}{۲}x)$، در بازهٔ $(۰,۴)$ است. b کدام است؟



(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲



۶۳- شکل زیر نمودار تابع $y = ۱ + a\sin(b\pi x)$، در بازهٔ $\left(۰, \frac{۴}{۳}\right)$ است. $a+b$ کدام است؟

① ۳
② ۴
③ ۵
④ ۶

۶۴- اگر $f(x) = ۲ - |x+۱|$ و $g(x) = x + |x|$ باشد، برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$، کدام است؟

① $\left(-\infty, \frac{۱}{۲}\right)$
② $(-۱, +\infty)$
③ $\left(-\frac{۱}{۲}, +\infty\right)$
④ $(۰, +\infty)$

۶۵- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\sin x - \sin ۳x}{\sqrt{۲ + ۲\cos x}}$ ، کدام است؟

① -۲
② -۱
③ ۱
④ ۲

۶۶- اگر $f(x) = \frac{x^۲}{|۱-x|}[x]$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^+} \frac{f(۳+h)_f(۳)}{h}$ ، برابر کدام است؟

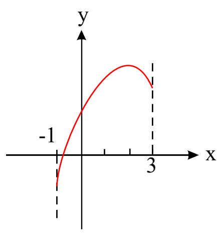
① $\frac{۱}{۴}$
② $\frac{۱۱}{۲}$
③ $\frac{۹}{۲}$
④ $\frac{۹}{۴}$

۶۷- تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[۳]{x+a} - b}{x} & ; x \neq ۰ \\ \frac{۱}{۱۲} & ; x = ۰ \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پیوسته است، b کدام است؟

① ±۱
② ±۲
③ ±۳
④ ±۴

۶۸- تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left[x - \frac{۱}{۳}\right] + \left[x + \frac{۲}{۳}\right]$، در بازهٔ $\left[-\frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳}\right]$ ، کدام است؟

① ۲
② ۳
③ ۴
④ ۵



۶۹- شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^۲ + ax + b}$ است، مقدار ماکسیمم مطلق تابع کدام است؟

① $۱ + \sqrt{۳}$
② $۲\sqrt{۳}$
③ $۱ + ۲\sqrt{۲}$
④ ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ با استفاده از تغییر متغیر $x^2+4x+5=t$ داریم:

$$x^2+4x+5-2=\sqrt{x^2+4x+5}\Rightarrow t-2=\sqrt{t}\qquad (I)$$

چون عبارت سمت راست همواره مثبت است باید عبارت سمت چپ هم همواره مثبت باشد.

$$t-2\ge 0\Rightarrow t\ge 2$$

حال طرفین عبارت I را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(t-2)^2=(\sqrt{t})^2\Rightarrow t^2-4t+4=t\Rightarrow t^2-5t+4=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t=1\to \text{با توجه به اینکه } t\ge 2 \text{ است، پس غیر قابل قبول است.}\\ t=\frac{c}{a}=4\to x^2+4x+5=4\to x^2+4x+1=0\to\Delta=16-4=12>0\end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها : $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=1$

۲ - گزینه ۴ با توجه به شکل تابع $f(x)$ در نقاط به طول‌های ۳− و ۱− و ۲ محور xها را قطع می‌کند.

شرط دامنه : $(x+1)\cdot f(x)\ge 0\Rightarrow \begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\ f(x)=0\Rightarrow x=-3,-1,2\end{cases}$

توجه: چون عدد $x=-1$ دو بار تکرار شده است، پس ریشهٔ مضاعف محسوب شده و علامت معادله در طرفین ریشهٔ مضاعف تغییر نمی‌کند.

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$(x+1)\cdot f(x)\ge 0$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

$$D_f=(-\infty\,,\,-3]\cup[2\,,\,+\infty)=\mathbb{R}-(-3\,,\,2)$$

۳ - گزینه ۱ f صعودی است هرگاه $f'>0$ و جهت تقعر f رو به پایین است هرگاه $f''<0$ باشد.

$$f(x)=\sin^2 x-2\sin x\to\begin{cases}f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x=\sin 2x-2\cos x\\ f''(x)=2\cos 2x+2\sin x\end{cases}$$

$$f'(x)=0\to 2\cos x(\sin x-1)=0\to\begin{cases}\cos x=0\to x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \sin x=1\to x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\to$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ تابع f صعودی است. (I)

$$f''(x)=0\to 2\cos 2x+2\sin x=0\to 2(1-2\sin^2 x+\sin x)=0$$

$$\to -2\sin^2 x+\sin x+1=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\sin x=1\to x=\frac{\pi}{2} & \text{ریشه مضاعف}\\ \sin x=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}\to\begin{cases}x=\frac{7\pi}{6}\\ x=\frac{11\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از جدول متوجه می‌شویم در بازه‌های $(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$ تقعر نمودار f رو به پایین است. (II)

$$\begin{cases}f'>0\\ f''<0\end{cases}\xrightarrow{(I)\cap(II)} x\in(\frac{7\pi}{6}\,,\,\frac{3\pi}{2})$$

۴ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_a^a e=1 \quad , \quad \log a^b=b\cdot\log a$

ابتدا $f^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=4-3^{2x}\Rightarrow y=4-3^{2x}\Rightarrow 3^{2x}=4-y\xrightarrow[\text{پایه سه می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم در}}2x=\log_3(4-y)\Rightarrow x=\frac{1}{2}\log_3(4-y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log_3(4-x)\qquad ;\quad 4-x>0\Rightarrow x<4\Rightarrow D_{f^{-1}}=(-\infty,4)$$

$$g(x)=\sqrt{xf^{-1}(x)}\Rightarrow g(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x\cdot\log_3(4-x)}$$

برای یافتن دامنهٔ $g(x)$ باید ریشه‌های عبارت زیر رادیکالی را بیابیم و سپس تعیین علامت کنیم.

$$\log_3(4-x)=0\Rightarrow 4-x=1\Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$		0		3		4
$\frac{1}{2}x\log(4-x)$		$-$		$+$		$-$	

$\Rightarrow D_g=[0,3]$

۵ - گزینه ۲ توجه: تابع درجهٔ دوم $y=Ax^2+Bx+C$ همواره بالای محور xها قرار دارد. هرگاه $\begin{cases}A>0\\ \Delta<0\end{cases}$ باشد.

$$\begin{cases}1-a>0\to a<1\quad(1)\\ \Delta<0\to 24+4a(1-a)<0\to 4a^2-4a-24>0\to a^2-a-6>0\\ \to(a-3)(a+2)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}a<-2\quad\text{یا}\quad a>3\quad(2)\end{cases}$$

$$(1)\cap(2)=a<-2$$

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم: $D_{gof(x)}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\to D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^2}\to x-x^2\ge 0\to x(1-x)\ge 0$$

تعیین علامت

		0		1	
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\to D_g=[0,1]$

$$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1\right\}$$

$0\le\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1\to$ چون $1+x^2>0$ باضرب طرفین در این مقدار علامت نامساوی تغییر نمیکند.

$$\to 0\le 1-x^2\le 1+x^2$$

$$1-x^2\ge 0\to x^2\le 1\to -1\le x\le 1\quad(I)$$

$1-x^2\le 1+x^2\to 2x^2\ge 0\to$ همواره برقرار $\xrightarrow{(II)} I\cap II\Rightarrow D_{gof}=[-1,1]$

۷ - گزینه ۲ ابتدا تابع $y=(\frac{f}{g})(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+|x|}{|x+1|+1}$$

با توجه به تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ به ازای اعداد نامثبت (منفی و صفر)، صورت کسر صفر می‌شود بنابراین در این فاصله برد تابع عدد صفر است.

$$x\le 0\Rightarrow\quad y=0$$

$$x>0\Rightarrow\quad y=\frac{x+x}{x+1+1}=\frac{2x}{x+2}$$

چون این یک تابع صعودی است ($f'>0$) با جایگذاری ابتدا و انتهای دامنه، برد تابع محاسبه می‌شود.

$$\begin{array}{l}x=0\to f(0)=0\\ x\to+\infty\Rightarrow y=2\end{array}\Rightarrow R_f=[0,2)$$

و یا می‌توان گفت:

$$y=\frac{2x}{x+2}=2-\frac{4}{x+2}$$

$$x<0\Rightarrow x+2<2\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{x+2}<0\Rightarrow 0<2-\frac{4}{x+2}\Rightarrow D_y=(0,2)\cup\{0\}=[0,2)$$

۸ - گزینه ۱ با توجه به شکل در نقطه عطف خط مماس بر منحنی افقی است؛ یعنی طول نقطه عطف هم ریشه مشتق اول است و هم ریشه مشتق دوم، بنابراین ریشه مضاعف مشتق اول محسوب می شود.

$$f'(x)=-4x^3+24x^2+2ax=-2x\cdot(2x^2-12x-a)$$

معادله $f'=۰$ یک ریشه ساده $x=۰$ دارد و یک ریشه مضاعف در معادله $۲x^۲-۱۲x-a=۰$ دارد، بنابراین:

$$۲x^۲-۱۲x-a=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} (-۱۲)^۲-۴(۲)\cdot(-a)=۰$$
$$۱۴۴+۸a=۰ \rightarrow a=-۱۸$$

۹ ـ گزینه ۲ ابتدا تابع $fog(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=x-\sqrt{x} \rightarrow fog(x)=f(g(x))=f(x-\sqrt{x})$$

برای محاسبه ریشه‌های معادله $f(x-\sqrt{x})=۰$ ابتدا باید ببینیم که تابع $f(x)$ چند بار محور xها را قطع می‌کند همانطور که می‌دانیم:

$$f(۶)=۰ \Rightarrow x-\sqrt{x}=۶ \Rightarrow x-۶=\sqrt{x} \rightarrow x^۲-۱۲x+۳۶=x$$
$$\Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \text{ غ ق ق} \\ x=۹ \end{cases}$$
$$f(-\tfrac{۱}{۴})=۰ \Rightarrow x-\sqrt{x}=-\tfrac{۱}{۴} \Rightarrow x-\sqrt{x}+\tfrac{۱}{۴}=۰$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x}-\tfrac{۱}{۲})^۲=۰ \Rightarrow \sqrt{x}=\tfrac{۱}{۲} \Rightarrow x=\tfrac{۱}{۴}$$

پس تابع fog دو بار محور xها را قطع می‌کند.

۱۰ ـ گزینه ۴ با توجه به رابطهٔ $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ داریم:

$$f(x)=a-۲\cos\left(bx+\frac{\pi}{۲}\right)$$
$$f(x)=a+۲\sin bx$$

$$\left.\begin{array}{l} T=\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|b|} \rightarrow |b|=۳ \rightarrow b=\pm۳ \rightarrow \ b=۳ \quad \text{ق.ق} \\ f(\frac{\pi}{۱۸})=۰ \rightarrow a+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۰ \rightarrow a+۱=۰ \rightarrow a=-۱ \end{array}\right\} \rightarrow a+b=-۱+۳=۲$$

۱۱ ـ گزینه ۱

روش هوپیتال: اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}$ باشد و f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}=\frac{\sqrt{a+b}-۲}{۰}\neq\infty \Rightarrow \sqrt{a+b}=+۲$$

چون مخرج صفر است
پس باید صورت کسر هم صفر باشد.

$$a+b=۴ \Rightarrow b=۴-a \quad (\star)$$
$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{ax+b}+۲}{\sqrt{ax+b}+۲}=\lim_{x\to۱}\frac{ax+b-۴}{(x^۲-۱)(\sqrt{a+b}+۲)}\overset{\star}{\rightarrow}\lim_{x\to۱}\frac{ax+۴-a-۴}{(x^۲-۱)(۴)}=\lim_{x\to۱}\frac{a(x-۱)}{۴(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{a}{۸}=\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow a=۱۲ \Rightarrow b=-۸$$

۱۲ ـ گزینه ۳ دورهٔ تناوب تابع برابر π است.

$$T=\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۲ \Rightarrow b=\pm۲$$

ماکزیمم تابع برابر ۱٫۵ است، پس:

$$۱+|a|=۱٫۵ \Rightarrow |a|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

تابع در اطراف $x=۰$ نزولی است، پس a، b مختلف‌العلامت هستند و داریم:

$$a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-۲ \Rightarrow a+b=-\frac{۳}{۲}$$
$$a=-\frac{۱}{۲}\ ,\ b=۲ \Rightarrow a+b=\frac{۳}{۲}$$

۱۳ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})}$, $\boxed{\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}$

$$\frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}-\frac{۱}{\cos ۱۵^\circ}=\frac{\cos ۱۵^\circ-\sin ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ}=\frac{-\sqrt{۲}\sin(۱۵^\circ-۴۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin ۲(۱۵^\circ)}=\frac{-\sqrt{۲}\sin(-۳۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

۱۴ ـ گزینه ۱ صورت کسر را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos ۳x}-\sqrt{\cos x}}{x^۲}\times\frac{\sqrt{\cos ۳x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos ۳x}+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۳x-\cos x}{x^۲(۱+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-۲\sin^۲\frac{۳x}{۲}-(۱-۲\sin^۲\frac{x}{۲})}{۲x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}-۲\sin^۲\frac{۳x}{۲}}{۲x^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۲}{۴}-\frac{۹x^۲}{۴}}{x^۲}=-۲$$

۱۵ - گزینه ۱ می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$

و می‌دانیم تابع به فرم $y=\begin{cases}f(x) & x\in Z\\ g(x) & x\notin Z\end{cases}$ در صورتی همواره پیوسته هستند که $f(x)=g(x)$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & ;x\notin Z\\ a & ;x\in Z\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}-۱ & x\notin Z\\ a & x\in Z\end{cases}$$

برای پیوستگی باید دو ضابطه برابر شوند پس: $a=-۱$

۱۶ - گزینه ۳ با توجه به حد $\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-\frac{۳}{۲}$ و مشتق‌پذیری f در $x=۴$، نتیجه می‌گیریم که $f(۴)=-۷$ و $f'(۴)=-\frac{۳}{۲}$ است.

با توجه به اطلاعات کسب شده، مشتق $y=\frac{f(۲x)}{x}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{f(۲x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{۲xf'(۲x)-f(۲x)}{x^۲}$$

$$y'(۲)=\frac{۴f'(۴)-f(۴)}{۴}=\frac{۴(-\frac{۳}{۲})-(-۷)}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۱۷ - گزینه ۲ باید ببینیم که در چه فاصله‌ای $f'\leq ۰\ ,\ f''\geq ۰$ است.

$$f(x)=\cos^۲ x-۲\cos x\to f'(x)=-۲\sin x\cdot\cos x+۲\sin x=۰$$

$$۲\sin x\cdot(-\cos x+۱)=۰\to\sin x=۰\to x=۰,\pi,۲\pi$$

$$-۱+\cos x=۰\to\cos x=۱\to x=۰,۲\pi$$

x	۰		π		۲π
f'	۰	$+$	۰	$-$	۰
f		$\nearrow$		$\searrow$	

$\to(I)$ در بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ تابع نزولی است.

برای بررسی تقعر منحنی f'' را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x)=-\sin ۲x+۲\sin x\to f''(x)=-۲\cos ۲x+۲\cos x=۰$$

$$f''(x)=-۲(۲\cos^۲ x-۱)+۲\cos x=۰\to f''(x)=-۴\cos^۲ x+۲\cos x+۲=۰$$

$$\cos x=۱\to x=۰,۲\pi\quad,\quad\cos x=-\frac{۱}{۲}\to x=\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}$$

x	۰		$\frac{۲\pi}{۳}$		$\frac{۴\pi}{۳}$		۲π
f''	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

در بازهٔ $(۰,\frac{۲\pi}{۳})\cup(\frac{۴\pi}{۳},۲\pi)$ تقعر منحنی رو به بالا است. (II)

$$I\cap II\Rightarrow(\pi,\frac{۴\pi}{۳})$$

۱۸ - گزینه ۲

با توجه به تعریف داریم:

$$D_{fog(x)}=\{x|x\in D_g\ |\ g(x)\in D_f\}$$

$$D_{fog}=\begin{cases}x\in D_g\Rightarrow x^۲-۱۵x>۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱۵\\ x<۰\end{cases}\quad(۱)\\ g(x)\in D_f\xrightarrow{D_f:\ x\leq ۲}g(x)\leq ۲\to\log(x^۲-۱۵x)\leq ۲\Rightarrow x^۲-۱۵x-۱۰۰\leq ۰\Rightarrow -۵\leq x\leq ۲۰\quad(۲)\end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲)\ =[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$$

توجه: برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $y=\log_B^A$ باید $A>۰\ ,\ B>۰\ ,\ B\neq ۱$ باشد.

۱۹ - گزینه ۱

$$\text{اگر}:\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\begin{matrix}\sin\alpha=\cos\beta\\ \tan\alpha=\cot\beta\end{matrix}$$

$$(x+\frac{\pi}{۸})+(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\frac{\pi}{۲}\to\sin(x+\frac{\pi}{۸})=\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})$$

$$\Rightarrow 2\sin(x+\frac{\pi}{8})=1 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{8}=2k\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ x+\dfrac{\pi}{8}=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{[0,2\pi]} \begin{matrix} x_1=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{24} \\ x_2=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{17\pi}{24} \end{matrix} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{18\pi}{24}=\frac{3\pi}{4}$$

۲۰ ـ گزینه ۱

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

$$x\to\pi^-:\ \sin\frac{\pi}{2}[0^+]-\cos\pi[0^-]=0-(-1)\cdot(-1)=-1$$
$$x\to\pi^+:\ \sin\frac{\pi}{2}[0^-]-\cos\pi[0^+]=(1)\times(-1)-0=-1$$

۲۱ ـ گزینه ۲

چون هردو ضابطه همواره پیوسته است پس در نقطهٔ مرزی $x=a$ هم پیوسته است و حد چپ و حد راست در $x=a$ برابر هستند.

شرط پیوستگی $1-\frac{a}{4}=\frac{1}{a}\Rightarrow 4a-a^2-4=0\Rightarrow a=2$

۲۲ ـ گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطه‌ی تماس و بعد معادله‌ی خط مماس را می‌یابیم.

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3};\ f'_{(x)}=\frac{\cos x\cdot(1+\cos x)+\sin x(\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

$$m=f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

شیب خط مماس برابر $\frac{2}{3}$ است و شیب خط $y=x$ هم عدد ۱ است؛ بنابراین زاویه‌ی بین دو خط برابر است با:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_2\cdot m_2}\right|=\left|\frac{\frac{2}{3}-(1)}{1+\frac{2}{3}}\right|=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=0/2$$

۲۳ ـ گزینه ۳

با توجه به رابطه داده‌شده و مشتق‌پذیر f در $x=2$، مشخص است که $f(2)=9$ و $f'(2)=\frac{3}{2}$.

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow g'(2)=\sqrt{f(2)}+\frac{2f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}=3+\frac{\frac{3}{2}}{3}=3+\frac{1}{2}=3/5$$

۲۴ ـ گزینه ۱ در حالت کلی، برای محاسبه اکسترمم‌های نسبی می‌توانیم مشتق تابع را در نقاط بحرانی تعیین علامت کنیم.

$$y'=2(x-1)\sqrt[3]{x^2}+(x-1)^2\times\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'=2(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\frac{x-1}{3\sqrt[3]{x}})=\frac{2(x-1)(3x+x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{cases}$$ نقاط بحرانی

x		0		$\frac{1}{4}$		1	
f'	$-$	ت.ن	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ طول ماکسیمم نسبی

۲۵ ـ گزینه ۳ نکته: اگر $x=k$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشد، آنگاه:

$$ax^2+bx+c=a\cdot(x-k)^2$$

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ منحنی در اطراف $x=1$ از هر دو طرف به $+\infty$ می‌رود، بنابراین $x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج تابع بوده و $x=-2$ طول مینیمم نسبی تابع است.

$x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج است پس، مخرج به‌صورت $(x-1)^2$ می‌باشد. بنابراین:

$$x^2+bx+c=(x-1)^2\to x^2+bx+c=x^2-2x+1\to\begin{cases} b=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

$x=-2$ طول مینیمم نسبی تابع است، پس $f'(-2)=0$ است.

$$f(x)=\frac{x^2+a}{x^2-2x+1}\to f'(x)=\frac{2x(x^2-2x+1)-(2x-2)(x^2+a)}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(-2)=0\to -4(9)-(-6)(4+a)=0\to a=2$$

۲۶ - گزینه ۴ شرط وجود دو ریشهٔ مثبت در معادلهٔ درجه دوم این است که $\Delta, S, P>0$ باشد:

$\Delta>0\Rightarrow 4(a-2)^2-4(14-a)>0\Rightarrow 4a^2-12a-40>0\Rightarrow a^2-3a-10>0\Rightarrow (a-5)(a+2)>0\Rightarrow a<-2$ یا $a>5\quad (I)$
$S>0\Rightarrow S=-\frac{-2(a-2)}{1}>0\Rightarrow a>2\quad (II)$
$P>0\Rightarrow P=\frac{14-a}{1}>0\Rightarrow a<14\quad (III)$

$$I\cap II\cap III\Rightarrow 5<a<14$$

توجه: در معادلهٔ درجهٔ دوم هرگاه $\frac{c}{a}>0$ باید شرط $\Delta>0$ بررسی گردد و اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد و نیاز به بررسی $\Delta>0$ نیست.

۲۷ - گزینه ۱ می‌دانیم: $y=\cos ax\to T=\frac{2\pi}{a}$

با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع 4π است.

$$y=\frac{1}{2}+2\cos mx\to T=\frac{2\pi}{m}=4\pi\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

بازنویسی: $f(x)=\frac{1}{2}+2\cos\frac{1}{2}x\xrightarrow{x=\frac{16\pi}{3}}f(\frac{16\pi}{3})=\frac{1}{2}+2\cos\frac{8\pi}{3}=\frac{1}{2}+2\cos(\frac{9\pi-\pi}{3})$

$$=\frac{1}{2}+2\cos(3\pi-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+2(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

۲۸ - گزینه ۴ می‌دانیم که در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ مجموع جذر هر دو ریشه برابر است با:

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}\quad,\quad S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

پس در این سؤال داریم:

$$2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0\Rightarrow S=-\frac{b}{a}=\frac{m+1}{2}\quad,\quad P=\frac{c}{a}=\frac{1}{16}$$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}}=2\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4\to m=6$$

۲۹ - گزینه ۲ ابتدا دامنه f را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}\qquad D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}\quad (I)$$

$$y=g(f(x))=\sqrt{f-f^2}=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}(1-\frac{1+x^2}{1-x^2})}=\sqrt{\frac{-2(1+x^2)\cdot x^2}{(1-x^2)^2}}$$

$$D_{gof}:\frac{-2(1+x^2)\cdot x^2}{(1-x^2)^2}\geq 0$$

تابع gof همواره نا مثبت است و برای این که در زیر رادیکال قرار گیرد، فقط می تواند صفر باشد، پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ بالا فقط $\{0\}$ است. (II)

$$I\cap II\Rightarrow D_{gof}\{0\}$$

۳۰ - گزینه ۳

برای حل اینگونه از نامعادلات، پس از تعیین علامت و حذف نماد قدرمطلق، طرفین را به توان فرجه رادیکال رسانده و با توجه به محدوده تغییرات x جواب را می‌یابیم.

$$3x+4 \ge 0 \to x \ge -\frac{4}{3}$$

$$\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$$

$$-\frac{4}{3} < x < 1 \to \sqrt{3x+4} > -3x+2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+4 > 9x^2 - 12x + 4$$

$$\to 9x^2 - 15x < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} 0 < x < \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} < x < 1 \end{cases} \to 0 < x < 1 \qquad (1)$$

$$x \ge 1 \to \sqrt{3x+4} > x - 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+4 > x^2 - 4x + 4$$

$$\to x^2 - 7x < 0 \to \begin{cases} 0 < x < 7 \\ x \ge 1 \end{cases} \to 1 \le x < 7 \qquad (2)$$

$$(1) \cup (2): \text{جواب} = (0, 7) \xrightarrow{\text{نقطه میانی}} \frac{7}{2}$$

۳۱ - گزینه ۳

می‌دانیم $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$$

$$2\sin 2x \cos 2x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$$

$$\to 2\sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \to \cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \to 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \le x \le \pi} \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \to x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{0 \le x \le \pi} \left\{\frac{11\pi}{12}\right\} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \to x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{0 \le x \le \pi} \left\{\frac{7\pi}{12}\right\} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

۳۲ - گزینه ۳

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

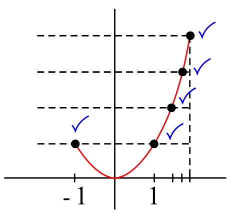
چون $x = \frac{\pi}{3}$ داخل جزء صحیح را صحیح می‌کند باید حد چپ و حد راست را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^-} [\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x] = [-1)(-1) + 2 = 3$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} f(x) = [0^+] \times (-1) + [3^+] = 3$$

۳۳ - گزینه ۳

راه حل اول: باتوجه به نمودار تابع $y = x^2$ تابع $f(x) = [x^2]$ در نقاط مشخص شده ناپیوسته است.



راه حل دوم: ابتدا باید ببینیم در بازهٔ داده شده، چه اعدادی عبارت داخل جزء صحیح را صحیح می‌کنند.

$$x^2 = k \to x = \pm\sqrt{k} \xrightarrow{-1 \le x \le 2} x = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, -1, 2$$

اما چون $x = 0$ طول نقطهٔ مینیمم عبارت x^2 است، پس علی‌رغم صحیح شدن پیوسته می‌باشد از طرفی باید پیوستگی راست تابع در ابتدای بازه و پیوستگی چپ تابع در انتهای بازه را نیز بررسی کنیم.

$$x = -1 \begin{cases} \lim_{x \to (-1)^+} [x^2] = [(+1)^-] = 0 \\ f(-1) = [(-1)^2] = +1 \end{cases} \to$$ تابع در $x = -1$ ناپیوسته است.

$$x = +2 \begin{cases} \lim_{x \to (2)^-} [x^2] = [4^-] = 3 \\ f(2) = [4] = 4 \end{cases} \to$$ تابع در $x = 2$ ناپیوسته است.

پس تابع در نقاط $\{-1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$ یعنی در ۵ نقطه ناپیوسته است.

۳۴ - گزینه ۴

می‌دانیم $0 \le u - [u] < 1$ در نتیجه با ضرب $\frac{1}{x^2}$ در عبارت داخل پرانتز داریم:

$$\frac{1}{x^2}-\left[\frac{1}{x^2}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\left[\frac{1}{x^2}\right]=[0,1)$$ چون بیشمار حد در این بازه وجود دارد، پس یکتا نیست و حد وجود ندارد.

۳۵ ـ گزینه ۱

$$y=(5-x)x^{\frac{2}{3}}\to y=5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$$

$$y'=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\to y''=-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y''=\frac{-10-10x}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$$-10-10x=0\to x=-1,\quad 9x\sqrt[3]{x}=0\to x=0$$

توجه کنید که $x=0$ نقطه بازگشتی است، پس $x=-1$ نقطهٔ عطف است.

۳۶ ـ گزینه ۳

شکلی از سؤال را رسم می‌کنیم. مساحت مخروط را برحست ارتفاع آن یافته و سپس مینیمم آن را حساب می‌کنیم.

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h\ ,\quad L^2=h^2+r^2$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}\to r^2h=1\to r^2=\frac{1}{h}$$

$$S=\pi\sqrt{\frac{1}{h}}\times\sqrt{h^2+\frac{1}{h}}=\pi\sqrt{h+\frac{1}{h^2}}\to S'(h)=0\to$$ کافیست مشتق زیر رادیکال را برابر صفر قرار دهیم.

$$\to 1-\frac{2}{h^3}=0\to h^3=2\to h=\sqrt[3]{2}$$

۳۷ ـ گزینه ۱

یعنی این معادلهٔ درجه دوم باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد.

$$x_1x_2=\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{1-m}{m+2}<0\Rightarrow m<-2 \text{ یا } m>1$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a}<0$ است، معادله قطعاً دو ریشهٔ حقیقی دارد. پس $\Delta>0$ بررسی نمی‌گردد.

۳۸ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan 3x\to\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\tan 3x$$

$$\to 3x=k\pi+\frac{\pi}{4}-x\to 4x=k\pi+\frac{\pi}{4}\to x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}$$

۳۹ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: روش هوپیتال: اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه :

$$H:\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

برای پیوسته بودن باید: $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 3^+}\frac{-\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}}{1}=-\frac{1-\frac{1}{4}}{2}=-\frac{3}{8}$$

$$f(3)=3a-3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}\quad\text{و}\quad\lim_{x\to 3^-}(ax-3a-\frac{3}{8})=-\frac{3}{8}$$

چون حد تابع با مقدار تابع برابر است پس به ازای هر مقدار a این تابع پیوسته است.

۴۰ ـ گزینه ۲ با توجه به اینکه $(x\to 0^+\Rightarrow\sin x<x)$ داریم $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1^-$ و می‌دانیم که حاصل $[1^-]$ عدد صفر مطلق است و $0\times\infty=0$ مطلق $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\operatorname{Sin}x}{x}\right]\cot x=0,$.

۴۱ ـ گزینه ۳ ضابطهٔ تابع را در یک همسایگی $x=\pi$ می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}2\sin 2x & ;\ x\le\pi\\ \sin 2x & ;\ x>\pi\end{cases}$$

پس برای مشتق تابع داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}4\cos 2x & ; x<\pi\\ 2\cos 2x & ; x>\pi\end{cases}$$
$$\Rightarrow f'_-(\pi)=4,\ f'_+(\pi)=2$$

درنتیجه $\tan\theta$ را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\tan\theta=\left|\frac{4-2}{1+4\times 2}\right|=\frac{2}{9}$$

۴۲ - گزینه ۱ با توجه به نمودار، تابع در $x=-1$ نقطهٔ عطف با مماس افقی دارد، پس $f'(-1)=0$ و $f''(-1)=0$ می است، بنابراین داریم:

$$f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx$$
$$\begin{cases}f'(x)=4x^3-3x^2+2ax+b\Rightarrow f'(-1)=-4-3-2a+b=0\\ f''(x)=12x^2-6x+2a\Rightarrow f''(-1)=12+6+2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=7\\ 2a+18=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-9\\ b=-11\end{cases}$$

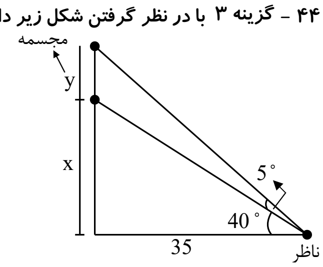
۴۳ - گزینه ۴

سهمی موردنظر محور xها را در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند، یعنی معادلهٔ زیر دو ریشهٔ منفی دارد. پس باید سه شرط $\Delta>0$ (زیرا دو ریشه دارد) و $\frac{c}{a}>0$ (ضرب دو عدد منفی، مثبت است) و $-\frac{b}{a}<0$ (جمع دو عدد منفی، منفی است) را لحاظ کنیم.

$$(m-2)x^2-2(m+1)x+12=0$$
$$\Delta=b^2-4ac>0\Rightarrow(-2(m+1))^2-4(m-2)(12)>0$$
$$\Rightarrow 4(m^2+2m+1-12m+24)>0\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}}(m^2-10m+25)>0\Rightarrow(m-5)^2>0$$
$$\Rightarrow m\in R-\{5\}$$
$$\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{12}{m-2}>0\Rightarrow m-2>0\Rightarrow m>2\qquad(1)$$
$$-\frac{b}{a}<0\Rightarrow\frac{2(m+1)}{m-2}<0\xrightarrow{m-2>0}m+1<0\Rightarrow m<-1\qquad(2)$$

مجموعه‌های (1) و (2) هیچ اشتراکی ندارد.

۴۴ - گزینه ۳ با در نظر گرفتن شکل زیر داریم:



$$\tan 40^\circ=\frac{x}{35}$$
$$\tan 40^\circ=\frac{8}{10}\Rightarrow\frac{x}{35}=\frac{8}{10}\Rightarrow x=28m$$
$$\tan 45^\circ=\frac{x+y}{35}=1\Rightarrow x+y=35\Rightarrow 28+y=35$$
$\Rightarrow y=7m$ ارتفاع مجسمه ۷ متر است.

۴۵ - گزینه ۳ می‌دانیم: روش هوپیتال: اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه :

$$H:\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

برای پیوسته بودن یک تابع باید در تمام نقاط دامنه، حد تابع با مقدار تابع برابر باشند.. در این تابع هردو ضابطه در دامنه‌هایشان همواره پیوسته هستند پس فقط باید پیوستگی را در نقطهٔ مرزی $x=2$ بررسی کنیم.

مقدار تابع $f(2)=2-a$ و حد چپ $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=2-a$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{a\cdot(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\quad H:\lim_{x\to 2^+}\frac{a\cdot\left(0+\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right)}{2x-2}=\frac{-\frac{a}{3}}{2}=-\frac{a}{6}$$

برای پیوسته شدن باید $2-a=-\frac{a}{6}\Rightarrow a=\frac{12}{5}=2{,}4$

۴۶ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\lim_{u\to 0}\sqrt[n]{1+u}\simeq 1+\frac{u}{n}\quad\text{و}\quad\lim_{u\to 0}(1-\cos^n u)\simeq\frac{u^2}{2}\times n\quad\text{و}\quad\lim_{x\to 0}[f(x)]+[-f(x)]=-1$$

$$\lim_{x\to 0}([2x]+[-2x])\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos^3 x)}{1-\sqrt{1+x^2}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{(1+\sqrt{1+x^2})}{(1+\sqrt{1+x^2})}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-۳(۲\sin^۲\frac{x}{۲})\times(۲)}{۱-۱-x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۳\times ۲\times\frac{x^۲}{۴}\times ۲}{-x^۲}=۳$$

۴۷ – گزینه ۱ تابعی که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی ($f'>۰$) یا اکیداً نزولی باشد ($f'<۰$) یک‌به‌یک است.

$$۱)\ f(x)=x+\sqrt{x}\rightarrow f'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}>۰$$ اکیداً صعودی

$$۲)\ g(x)=x-\sqrt{x}\rightarrow g'(x)=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$ غیریکنوا

$$۳)\ h(x)=۲x+\frac{۱}{x}\rightarrow h'(x)=۲-\frac{۱}{x^۲}$$ غیریکنوا

$$۴)\ p(x)=\frac{x}{x^۲+۱}\rightarrow p'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-x^۲+۱}{(x^۲+۱)^۲}$$ غیریکنوا

گزینهٔ ۱، اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است.

۴۸ – گزینه ۱ با عددگذاری به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و به کمک فرمول‌های مثلثاتی تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

می‌دانیم: $\boxed{۱+\sin ۲x=(\sin x+\cos x)^۲}$

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{\frac{\cos^۲x-\sin^۲x}{\cos^۲x}}{|\sin x+\cos x|}$$

توجه: به‌ازای $\frac{۳\pi}{۴}^-$ حاصل عبارت $\sin x+\cos x$ همواره مثبت است چون در ناحیهٔ دوم هرچقدر زاویه کوچک‌تر می‌شود اندازهٔ سینوس و کسینوس مثبت‌تر و بزرگ‌تر می‌شود.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{(\cos x-\sin x)\cdot\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cos^۲x\cdot\cancel{(\sin x+\cos x)}}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=\frac{-\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}}=-۲\sqrt{۲}$$

۴۹ – گزینه ۳ می‌دانیم: $\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_+(a)$ بنابراین:

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=f'_+(۱)$$

برای محاسبهٔ مشتق ابتدا باید براکت را تعیین عدد و قدرمطلق را تعیین علامت نماییم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-\left[۱^+\right]+x}=\sqrt{x^۲+x-۱}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x-۱}}\Rightarrow f'_+(۱)=\frac{۳}{۲\sqrt{۱}}=\frac{۳}{۲}$$

۵۰ – گزینه ۱ راه حل اول: برای پیوسته بودن تابع در $[۲,۳)$ باید در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-[x]}{x^۳-x-۶}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{(x-۲)(x^۲+۲x+۳)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x^۲+۲x+۳}=\frac{۱}{۴+۴+۳}=\frac{۱}{۱۱}=f(۲)=a$$

راه حل دوم:

می‌دانیم: روش هوپیتال: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=۰$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه :

$$H:\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۲,۳)$ پیوسته باشد باید در نقطهٔ $x=۲$ پیوستگی از راست داشته باشد یعنی $f(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)$

$$f(۲)=a\ ,\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{x-[x]}{x^۳-x-۶}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۳-x-۶}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم $$H:\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۳x^۲-۱}=\frac{۱}{۱۱}\Rightarrow a=\frac{۱}{۱۱}$$

۵۱ – گزینه ۲ توابع کسری به‌ازای ریشه‌های مخرج ناپیوسته هستند بنابراین تابع فوق در $x=-۲$ که ریشهٔ معادلهٔ $۰=۱+\sqrt[۳]{x+۱}$ ← است ناپیوسته است.

توجه: ریشهٔ مخرج کسر دومی عدد $x=-۵$ است اما زیر رادیکال فرجهٔ زوج را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست.

۵۲ – گزینه ۴ تنها نقطه‌ای که خط مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند نقطهٔ عطف است یعنی ریشهٔ ساده مشتق دوم یا نقطهٔ $x=-\frac{b}{۳a}$ در توابع درجهٔ سوم. داریم:

$$f(x)=x^۳-۲x^۲+۳x\xrightarrow{f''(x)=۰}x=-\frac{b}{۳a}=-\frac{-۲}{۳\times ۱}=\frac{۲}{۳}$$

شیب خط مماس $m = f'(\frac{2}{3}) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$

$$m = f'(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{3}) + 3 = \frac{5}{3}$$

۵۳ – گزینه ۱ برای محاسبهٔ نقطهٔ تلاقی با محور yها باید $x = 0$ قرار دهیم.

مختصات نقطه: $f(0) = \frac{\cos(0)}{2 - \sin(0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

$$f'(x) = \frac{-2\sin 2x \cdot (2 - \sin x) - (-\cos x) \cdot \cos 2x}{(2 - \sin x)^2}$$

$$m = f'(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -4(x - 0)$$

معادلهٔ خط قائم: $y - y_0 = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_0)$

پس خط قائم به‌صورت $y = -4x + \frac{1}{2}$ است.

برای محاسبهٔ نقطهٔ برخورد این خط با نیم‌ساز ناحیهٔ اول باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} y = -4x + \frac{1}{2} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow -4x + \frac{1}{2} = x \Rightarrow 5x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

۵۴ – گزینه ۲ می‌دانیم: $y = f(u) \to y' = u' \cdot f'(u)$

$$g'(x) = -2x \cdot f'(4 - x^2)$$

$$g''(x) = -2f'(4 - x^2) + 4x^2 \cdot f''(4 - x^2)$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{3}} g''(\sqrt{3}) = -2f'(1) + 12f''(1) = -2(-5) + 12(-1) = 10 - 12 = -2$$

۵۵ – گزینه ۳ کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} \times \frac{(1 + \cos\sqrt{x})}{(1 + \cos\sqrt{x})} = \frac{1 - \cos^2\sqrt{x}}{x(1 + \cos\sqrt{x})} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{sin^2\sqrt{x}}{x(2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\frac{\sin\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}})^2}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

۵۶ – گزینه ۲

برای پیوسته بودن باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

می دانیم: $\lim_{x\to 0} |\sin x| < \lim_{x\to 0} |x|$ بنابراین $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1^-$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos 4x = [1^-] \cos 0 = 0 \times 1 = 0$$

$$f(0) = a$$

شرط پیوستگی $\to f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \to a = 0$

۵۷ – گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $f(x) = g(x)\,|x - a|$، $\underline{x = a}$ به شرطی که ریشهٔ $g(x)$ نباشد نقطهٔ گوشه برای تابع $f(x)$ است. بنابراین در تابع $y = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 + 3}}$، $\underline{x = 1}$ گوشه است.

$$y = |x - 1|\,(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}) \Rightarrow \begin{cases} y'(1^+) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \\ y'(1^-) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

زاویهٔ بین دو خط مماس در نقطهٔ گوشه : $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}\right| = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

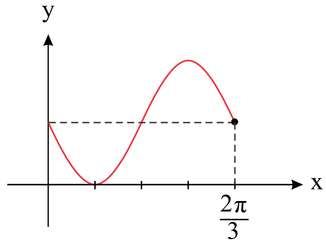
۵۸ – گزینه ۴ از عبارت $\lim_{h\to 0} \frac{f(-2 + h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ و مشتق‌پذیر f در $x = -2$ نتیجه می‌گیریم که $f(-2) = -3$ و $f'(-2) = \frac{1}{2}$.

$$y = x^2 f(x) \Rightarrow y' = 2xf(x) + x^2 f'(x) \Rightarrow y'(-2) = -4f(-2) + 4f'(-2)$$

$$\Rightarrow y'(-2) = 12 + 2 = 14$$

۵۹ - گزینه ۴ می‌دانیم: $y=\sin ax \to T=\frac{۲\pi}{|a|}$

با توجه به نمودار داریم:



$$T=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$y=۱-\sin mx \to T=\frac{۲\pi}{|m|}=\frac{۲\pi}{۳} \to |m|=۳ \to m=\pm ۳$$

چون نمودار در آغاز رو به پایین حرکت می‌کند و ضریب سینوس منفی است پس باید کمان سینوس مثبت باشد پس $m>۰$ بوده و $m=+۳$ قابل قبول است.

$$y=۱-\sin(+۳x)=۱-\sin ۳x \xrightarrow{x=\frac{۷\pi}{۶}} y=۱-\sin\frac{۲۱\pi}{۶}=۱-\sin\frac{۷\pi}{۲} \to y=۱+۱=۲$$

۶۰ - گزینه ۲ محل تلاقی از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به دست می‌آید.

$$f(x)=g(x) \to ۴^x=(\frac{۱}{۲})^{۲x}+\frac{۳}{۲} \to ۴^x=\frac{۱}{۴^x}+\frac{۳}{۲} \quad , \quad ۴^x=k \Rightarrow$$

$$k=\frac{۱}{k}+\frac{۳}{۲} \to ۲k^۲=۲+۳k \to ۲k^۲-۳k-۲=۰ \to \Delta=۹+۱۶=۲۵$$

$$\to k=\frac{۳\pm ۵}{۴} \to \begin{cases} k=۲ \to ۴^x=۲ \to ۲^{۲x}=۲ \to ۲x=۱ \to x=\frac{۱}{۲} \to y=f(\frac{۱}{۲})=۴^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۴}=۲ \\ k=-\frac{۱}{۲} \to ۴^x=-\frac{۱}{۲} \qquad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=(\frac{۱}{۲},۲) \\ B=(-\frac{۱}{۲},۱) \end{cases} \to |AB|=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

توجه: اگر $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} x_۲ \\ y_۲ \end{matrix}\right.$ آنگاه:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

۶۱ - گزینه ۳ فرض کنیم $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۸x^۲-mx-۸=۰$ و α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ باشند.

$$x_۱=\alpha^۳ \quad , \quad x_۲=\beta^۳ \qquad S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$x_۱+x_۲=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۳}{۸}$$

$$x_۱x_۲=\alpha^۳\beta^۳=(\alpha\beta)^۳=-۱$$

$$x^۲-\frac{۱۳}{۸}x-۱=۰ \xrightarrow{\times ۸} ۸x^۲-۱۳x-۸=۰$$

با مقایسهٔ این معادله و معادلهٔ صورت سؤال، مشخص می‌شود که $m=۱۳$ است.

۶۲ - گزینه ۱ با توجه به شکل، منحنی از $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ عبور می‌کند پس:

$$\left.\begin{matrix} (۰,۰) \xrightarrow{\text{تابع}} ۰=a+b\cos(۰) \Rightarrow a+b=۰ \\ (۲,۴) \xrightarrow{\text{تابع}} ۴=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}(۲))=a+b\cdot\cos\pi=a-b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۰ \\ a-b=۴ \end{cases} \Rightarrow a=۲ \ , \ b=-۲$$

۶۳ - گزینه ۳ می‌دانیم که در تابع $y=a\cdot\sin bx$ اگر $a\cdot b>۰$ باشد، تابع در نقطهٔ شروع $x=۰$ صعودی خواهد بود و اگر $a\cdot b<۰$ باشد، نزولی خواهد بود.

توجه:

$$y=k\cdot\sin ax \xrightarrow{\text{دورهٔ تناوب}} T=\frac{۲\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل، منحنی دو بار تکرار شده است. پس عدد $\frac{۴}{۳}$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$۲T=\frac{۴}{۳} \Rightarrow T=\frac{۲}{۳} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow |b|=۳$$

کمترین مقدار تابع $y = ۱ + a\sin(b\pi x)$ زمانی ایجاد می‌شود که مقدار سینوس عدد ۱ یا ۱− باشد و با توجه به شکل مقدار min عدد ۱− است. پس:

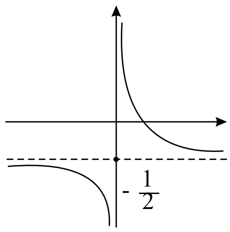
$$\min = ۱ - |a| = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a + b = \begin{cases} ۲ + ۳ = ۵ \\ -۲ - ۳ = -۵ \end{cases}$$

۶۴ – گزینه ۳ برای محاسبهٔ برد تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$، ابتدا دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را دو ضابطه‌ای نموده و سپس $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را تشکیل می‌دهیم و می‌دانیم که $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ در دامنهٔ مشترک ایجاد می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \le -۱ \\ -x + ۱ & x > -۱ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} ۰ & x \le ۰ \\ ۲x & x > ۰ \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & x \le -۱ \\ \text{تعریف نشده} & -۱ < x \le ۰ \\ \dfrac{-x + ۱}{۲x} & x > ۰ \end{cases}$$

منحنی $y = \frac{-x + ۱}{۲x}$ یک تابع هموگرافیک است که با رسم نمودار برد تابع را می‌یابیم.



با توجه به شکل برای $x > ۰$، برد تابع $\left(-\frac{۱}{۲}, +\infty\right)$ است.

۶۵ – گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\boxed{۱ + \cos u = ۲\cos^{۲}\frac{u}{۲}}$$

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x - \sin ۳x}{\sqrt{۲ + ۲\cos x}} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x - \sin ۳x}{\sqrt{۲(۱ + \cos x)}} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x - \sin ۳x}{\sqrt{۲ \times ۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}}} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x - \sin ۳x}{۲\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}$$

توجه: می‌دانیم وقتی $x \to \pi^+$ آنگاه کمان $\frac{x}{۲}$ به‌صورت $\frac{\pi^+}{۲}$ است که در ناحیهٔ دوم قرار دارد و کسینوس در ناحیهٔ دوم منفی است:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x - \sin ۳x}{-۲\cos\frac{x}{۲}} \xrightarrow{x - \pi = t} \lim_{t \to ۰} \frac{\sin(\pi + t) - \sin(۳\pi + ۳t)}{-۲\cos(\frac{\pi}{۲} + \frac{t}{۲})} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\sin t + \sin ۳t}{۲\sin\frac{t}{۲}} = \lim_{t \to ۰} \frac{-t + ۳t}{۲(\frac{t}{۲})} = ۲$$

۶۶ – گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\lim_{h \to ۰^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'_+(a)$$

بنا به تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \to ۰^+} \frac{f(۳ + h) - f(۳)}{h} = f'_+(۳)$$

برای محاسبه $f'_+(۳)$، ابتدا باید براکت را تعیین عدد و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

$$f(x) = \frac{x^{۲}}{|۱ - x|}[x] \xrightarrow{f'_+(۳)} f(x) = \frac{x^{۲}}{-(۱ - x)}\left[۳^+\right] = \frac{۳x^{۲}}{x - ۱}$$

$$f'(x) = \frac{۶x(x - ۱) - ۳x^{۲}}{(x - ۱)^{۲}} \Rightarrow$$

$$f'_+(۳) = \frac{۳۶ - ۲۷}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

۶۷ – گزینه ۲ چون در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس باید در نقطهٔ مرزی $x = ۰$ هم پیوسته باشد یعنی حد تابع و مقدار تابع در $x = ۰$ باهم برابرند. با توجه به تابع، مقدار تابع در $x = ۰$ برابر $\frac{۱}{۱۲}$ است؛ پس حد تابع هم باید همین باشد.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x + a} - b}{x} = \frac{\sqrt[۳]{۰ + a} - b}{۰}$$

چون مخرج کسر صفر است باید صورت هم صفر باشد.

$$\sqrt[3]{a} - b = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} = b \Rightarrow \boxed{a = b^3}$$

راه‌حل اول:

می‌دانیم $\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3}$ **. لذا:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+b^3}-b}{x} \times \frac{\sqrt[3]{(x+b^3)^2}+b\sqrt[3]{x+b^3}+b^2}{\sqrt[3]{(x+b^3)^2}+b\sqrt[3]{x+b^3}+b^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+b^3-b^3}{x\times\left(\sqrt[3]{(x+b^3)^2}+b\sqrt[3]{x+b^3}+b^2\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+b^3)^2}+b\sqrt[3]{x+b^3}+b^2}$$

$$= \frac{1}{b^2+b^2+b^2} = \frac{1}{3b^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \boxed{b = \pm 2}$$

راه‌حل دوم:

می‌دانیم: روش هوپیتال: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ **و** $f(x)$ **و** $g(x)$ **در** $x = a$ **مشتق‌پذیر باشند آنگاه :**

$$H : \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} = \frac{0}{0} \qquad H : \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = 4 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \pm 8$$

$$b^3 = \pm 8 \Rightarrow \boxed{b = \pm 2}$$

۶۸ ـ گزینه ۲

توابع براکتی به ازای هر عددی که داخل براکت را صحیح می‌کند، ناپیوسته است مگر آنکه آن عدد Min **داخل براکت یا ریشهٔ ضریب براکت باشد.**

اگر بازهٔ مورد بررسی بسته باشد، باید ابتدای بازه از راست و انتهای بازه از چپ پیوسته باشد.

$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = \left[x - \frac{1}{3} + 1\right] - 1 + \left[x + \frac{2}{3}\right]$$

$$f(x) = \left[x + \frac{2}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] - 1 = 2\left[x + \frac{2}{3}\right] - 1$$

ابتدا پیوستگی تابع را در ابتدا و انتهای بازه بررسی می‌کنیم:

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -3 \qquad \lim_{x\to\left(-\frac{5}{3}\right)^+} 2\left[x + \frac{2}{3}\right] - 1 = -3$$

درنتیجه در $x = -\frac{5}{3}$ **تابع از راست پیوسته است.**

در انتهای بازه پیوسته است چون به ازای $x = \frac{5}{3}$ **داخل براکت صحیح نمی‌شود.**

حال پیوستگی تابع را در بازهٔ $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ **بررسی می‌کنیم:**

$$-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3} \Rightarrow -1 < x + \frac{2}{3} < \frac{7}{3}$$

در بازهٔ $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ **سه عدد صحیح وجود دارد. پس تابع** $f(x)$ **در ۳ نقطه ناپیوستگی دارد.**

۶۹ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: برای محاسبهٔ اکسترمم‌های مطلق، نقاط بحرانی را در تابع قرار می‌دهیم و سپس ابتدا و انتهای بازه (دامنه) را در تابع قرار می‌دهیم. هر عددی که از همه بزرگ‌تر باشد، ماکسیمم مطلق و هر عددی که از همه کوچک‌تر باشد، مینیمم مطلق است.

با توجه به شکل، دامنهٔ تابع بازهٔ $[-1, 3]$ **است، پس** $x = -1$ **و** $x = 3$ **ریشه‌های زیر رادیکال هستند.**

یعنی عبارت زیر رادیکال $-(x+1)\cdot(x-3)$ **است. پس:**

$$f(x) = x + \sqrt{-(x+1)\cdot(x-3)} = x + \sqrt{-x^2+2x+3}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

$$\sqrt{-x^2+2x+3} = x-1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 1}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1 = -x^2+2x+3 \Rightarrow x^2-2x-1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1+\sqrt{2}\ ,\ x_2 = 1-\sqrt{2}$$ غ‌ق

$f\left(1+\sqrt{2}\right) = 1+2\sqrt{2}$ ماکسیمم مطلق

$f(-1) = -1$

$f(3) = 3$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۱۱ - ۱	۲۱ - ۲	۳۱ - ۳	۴۱ - ۳	۵۱ - ۲	۶۱ - ۳
۲ - ۴	۱۲ - ۳	۲۲ - ۲	۳۲ - ۳	۴۲ - ۱	۵۲ - ۴	۶۲ - ۱
۳ - ۱	۱۳ - ۳	۲۳ - ۳	۳۳ - ۳	۴۳ - ۴	۵۳ - ۱	۶۳ - ۳
۴ - ۳	۱۴ - ۱	۲۴ - ۱	۳۴ - ۴	۴۴ - ۳	۵۴ - ۲	۶۴ - ۳
۵ - ۲	۱۵ - ۱	۲۵ - ۳	۳۵ - ۱	۴۵ - ۳	۵۵ - ۳	۶۵ - ۴
۶ - ۲	۱۶ - ۳	۲۶ - ۴	۳۶ - ۳	۴۶ - ۲	۵۶ - ۲	۶۶ - ۴
۷ - ۲	۱۷ - ۲	۲۷ - ۱	۳۷ - ۱	۴۷ - ۱	۵۷ - ۳	۶۷ - ۲
۸ - ۱	۱۸ - ۲	۲۸ - ۴	۳۸ - ۲	۴۸ - ۱	۵۸ - ۴	۶۸ - ۲
۹ - ۲	۱۹ - ۱	۲۹ - ۲	۳۹ - ۴	۴۹ - ۳	۵۹ - ۴	۶۹ - ۳
۱۰ - ۴	۲۰ - ۱	۳۰ - ۳	۴۰ - ۲	۵۰ - ۱	۶۰ - ۲	