

امتحان ریاضی (شماره ۱)

یازدهم تجربی

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

Alihashemi-math.com

۱

دو خط به معادله‌های $2x + 3y = 5$ و $ax - 2y = 3$ را در نظر بگیرید. a را طوری بیابید که:

الف) این دو خط با هم موازی باشند.

ب) این دو خط بر هم عمود باشند.

$$m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$m_2 = -\frac{a}{-2} = \frac{a}{2}$$

الف) $m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{a}{2} \rightarrow a = -4 \rightarrow a = -\frac{4}{3}$

ب) $m_1 = \frac{-1}{m_2} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \left(\frac{-2}{3}\right) \left(\frac{a}{2}\right) = -1 \rightarrow a = 3$



۱

مقدار m را چنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$ برابر با ۳ باشد.

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$S = 3 \rightarrow \frac{m+1}{2} = 3 \rightarrow m+1 = 6 \rightarrow m = 5$$



اگر $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{13}$ ، آنگاه حاصل عبارت $\frac{7a-4b}{2c}$ را به دست آورید.

$$\frac{a}{5} = x \rightarrow a = 5x$$

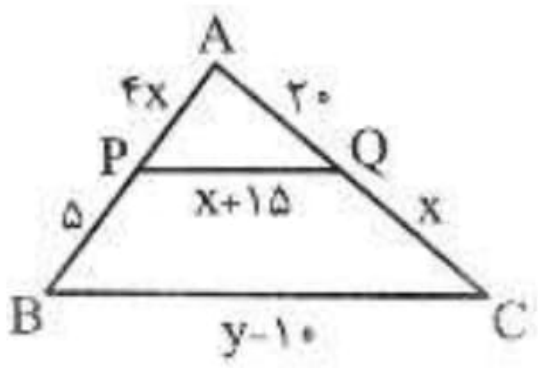
$$\frac{b}{7} = x \rightarrow b = 7x$$

$$\frac{c}{13} = x \rightarrow c = 13x$$

$$\frac{7(5x) - 4(7x)}{2(13x)} = \frac{7x}{26x} = \frac{7}{26}$$



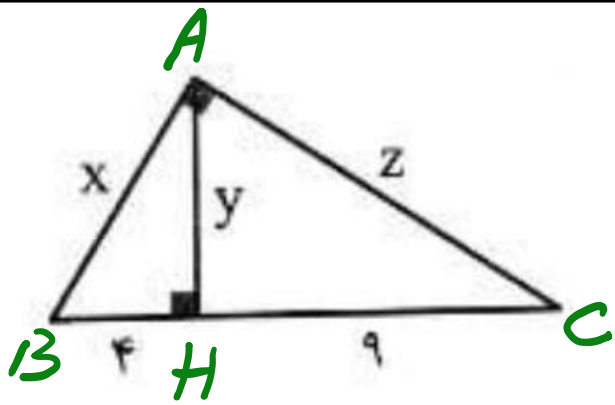
در شکل زیر، PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید.



$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{20}{x} \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x = 5$$

$$\frac{2x}{2x+5} = \frac{x+15}{y-10} \rightarrow \frac{20}{25} = \frac{20}{y-10} \rightarrow y-10 = 25 \rightarrow y = 35$$

در شکل زیر، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



$$AH^2 = BH \cdot HC \rightarrow y^2 = 4 \times 9 \rightarrow y = 2 \times 3 = 6$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \rightarrow x^2 = 4 \times 13 \rightarrow x = 2\sqrt{13}$$

$$AC^2 = CH \cdot BC \rightarrow z^2 = 9 \times 13 \rightarrow z = 3\sqrt{13}$$



۱ | تابع $f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، $\{-7, 18\}$ باشد. دایند

$$m^4 + 2 = 18 \rightarrow m^4 = 16 \rightarrow m = \pm 2 \checkmark$$

$$n^3 + 1 = -7 \rightarrow n^3 = -8 \rightarrow n = -2 \checkmark$$

اگر تابع خطی f از نقاط $(2, 1)$ و $(4, 5)$ عبور کند، ضابطه‌ی تابع وارون آن را به دست آورید.

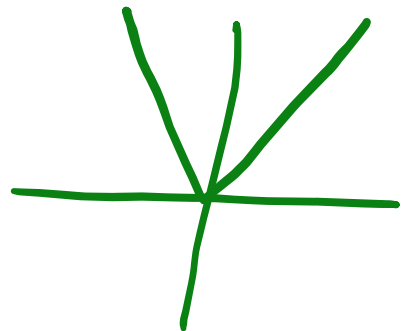
$$y = ax + b \rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \rightarrow y = 2x - 3$$
$$4a = 4 \rightarrow \underline{a = 2} \rightarrow \underline{b = -3}$$

$$y + 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y + 3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$$

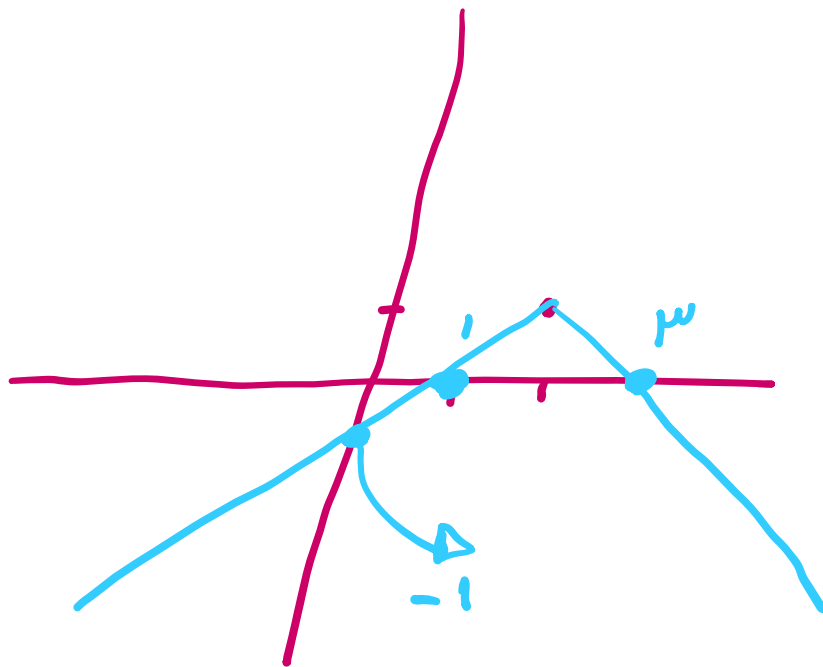


با استفاده از نمودار $f(x) = |x|$ نمودار تابع $y = 1 - |x - 2|$ را رسم کنید.

$$y = |x|$$



$$y = 1 - |x - 2|$$



اگر $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، مقدار $\tan \alpha$ را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{1}{5} + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

ربع سوم $\rightarrow \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{5}}{\frac{-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$



$$\underline{\underline{1}} \quad \cos(-a) = \cos a$$

مقدار عددی عبارت $\cos(-150^\circ)\cos 42^\circ + \sin 33^\circ\sin 30^\circ$ را به دست آورید.

$$\cos(150^\circ) = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 42^\circ = \cos(30^\circ + 12^\circ) = \cos 12^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 33^\circ = \sin(30^\circ - 3^\circ) = -\sin 3^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \sin(30^\circ - 0^\circ) = -\sin 0^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad \checkmark$$



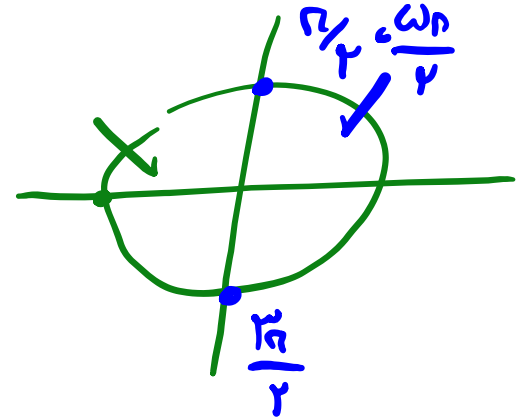
۱ | اگر $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}{2\sin(\alpha - 9\pi) + \cos(\alpha - \frac{5\pi}{2})} = \frac{1}{2}$ مقدار $\tan \alpha$ را به دست آورید.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$2\sin(\alpha - 9\pi) = -2\sin(9\pi - \alpha) = -2\sin \alpha$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$A = \frac{-\cos \alpha}{-2\sin \alpha + \sin \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \tan \alpha = 2$$



هر یک از معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

۱

الف) $2^{2x+1} = 32$

ب) $9^{x^2+2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x}$

الف) $2^{2x+1} = 2^5 \rightarrow 2x+1=5 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2$ ✓

ب) $(3^2)^{x^2+2} = (3^{-3})^{2x} \rightarrow 3^{2x^2+4} = 3^{-6x} \rightarrow 2x^2+4 = -6x$

$\rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = -1$ ✓

$x = -2$ ✓



اگر $\log_c a = \frac{3}{4}$ و $\log_c b = \frac{7}{9}$ باشد، مقدار $\log_b a^2 \sqrt{b}$ را بیابید.

$$\log_b a^2 \sqrt{b} = \frac{\log_c a^2 \sqrt{b}}{\log_c b^3} = \frac{\log_c a^2 + \log_c b^{\frac{1}{2}}}{\log_c b^3}$$

$$= \frac{2 \log_c a + \frac{1}{2} \log_c b}{3 \log_c b} = \frac{2 \left(\frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{9} \right)}{3 \left(\frac{7}{9} \right)} = \frac{17}{21}$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

الف) $2 \log_5 3 - \log_5 x = \log_5 3 + \log_5 9$

ب) $4(\log_2 \sqrt{5} - \log_2 3)$

(الف) $-\log_5 x = \log_5 3 \rightarrow \log_5 x = -\log_5 3 = \log_5 3^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{3}$

ب) $4 \log_2 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right) = 4 \log_2 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^4 = \frac{5}{9}$

$a^{\log_a b} = b$

۱

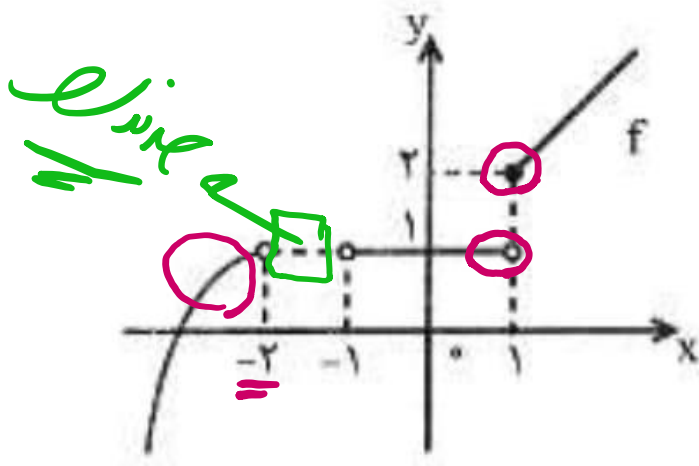
نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.

$$A) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$C) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$D) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$



سایت خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com

•/۵

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & ; x \geq 1 \\ 3x & ; x = 1 \\ bx - 2 & ; x < 1 \end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید که:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b - 2 = 1 \rightarrow b = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 1 = 2 \rightarrow a = 1$$



حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۱
=

$$A) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\cancel{(x-5)}(3x+2)}{\cancel{(x-5)}(x-1)} = \frac{17}{4}$$

$$A = 3x^2 - 13x - 10 \rightarrow 3A = 9x^2 - 13(3x) - 10 = (3x - 10)(3x + 2)$$
$$A = (x - 5)(3x + 2)$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{1 - \sin x}}{\cancel{(1 - \sin x)}(1 + \sin x)} = \frac{1}{2}$$



مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد.

۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2b}{x^2-2} & ; x \geq 2 \\ 2a+x+1 & ; x = 2 \\ 2b+5 & ; x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{حد راست} = \frac{2+2b}{2} = 1+b$$

$$\text{حد چپ} = 2b+5$$

$$\text{مقدار} = 2a+3$$

$$2b+5 = 1+b \rightarrow b = -4$$

$$2a+3 = 1+b \rightarrow a = -3$$



۱

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که $P(A|B) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ ، آنگاه $P(A \cup B)$ را بیابید.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



۱

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

متصل

یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم:

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید.

ج) پیشامد B که در آن سکه «رو» و تاس عدد کوچکتر از پنج بیاید را مشخص کنید.

د) آیا دو پیشامد A و B مستقل اند؟ چرا؟

$$S = \{ (P,1), (P,2), (P,3), (P,4), (P,5), (P,6), (R,1), (R,2), (R,3), (R,4), (R,5), (R,6) \}$$

$$A = \{ (1,R), (1,P), (3,R), (3,P), (5,R), (5,P) \} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{ (R,1), (R,2), (R,3), (R,4) \} \rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$A \cap B = \{ (1,R), (3,R) \} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

اگر میانگین ده داده‌ی آماری برابر ۵ و ضریب تغییرات ۳ باشد:

$$\sigma^2 = 225 = \frac{\sum (x-5)^2}{10} \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{10} (x-5)^2 = 2250$$

الف) واریانس داده‌ها کدام است؟

ب) اگر دو داده‌ی ۵ به داده‌های قبلی اضافه شود، ضریب تغییرات ۱۲ داده را بیابید.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \rightarrow \bar{x} = \frac{50}{10} \rightarrow \bar{x} = 5$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow 3 = \frac{\sigma}{5} \rightarrow \sigma = 15 \rightarrow \sigma^2 = 15^2 = 225$$

$$\text{نویسنده } \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{2250 + 0 + 0}{12} = 187,5$$

$$\text{نویسنده } CV = \frac{\sqrt{187,5}}{5}$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math