

آموزش ریاضی

هندسه

(بخش اول - بیضی و دایره)

علی هاشمی

دوران

۱- استوانه در مستطیل مربع

۲- مخروط در مست

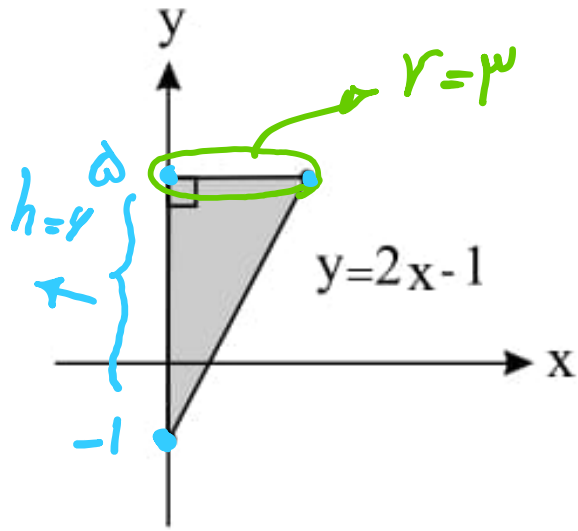
۳- کره در دایره

$$V = \pi r^2 h \text{ در استوانه}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ در مخروط}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ در کره}$$

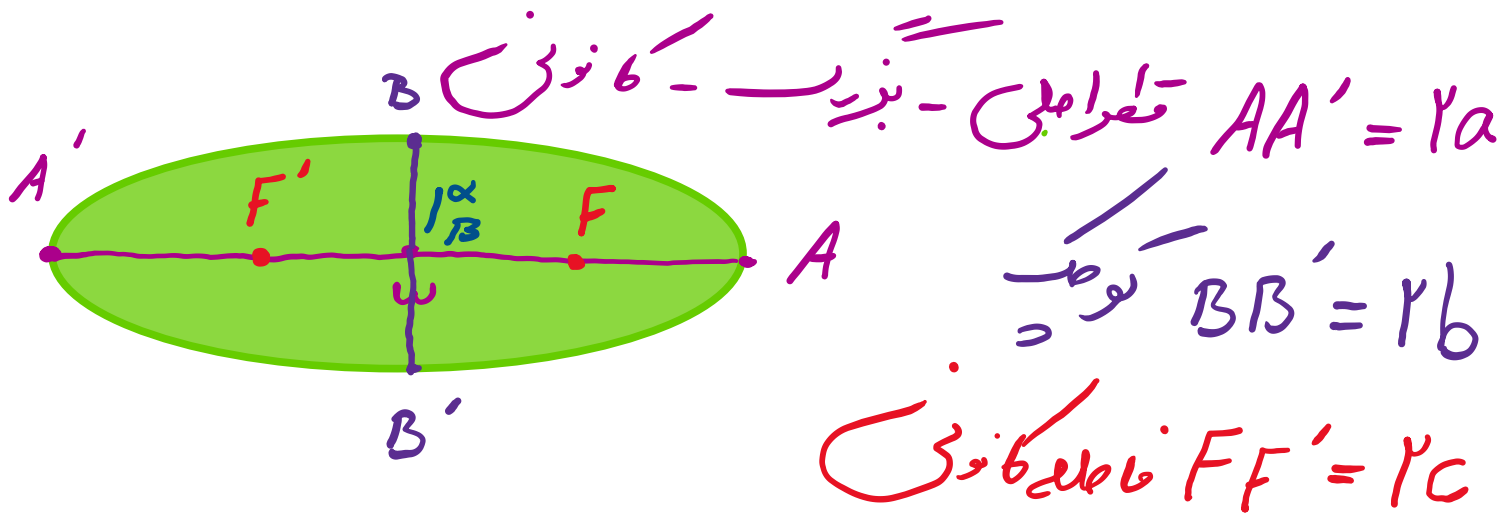
۱- مطابق شکل وتر مثلث به معادله $y = 2x - 1$ ، با شرط $0 \leq x \leq 3$ مفروض است. اگر مثلث را حول محور y ها دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$

(A large red checkmark is drawn over the calculation.)



$$\underline{\underline{a^2 = b^2 + c^2}}$$

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
 (خروج از مرکز)

$$A \Big|_B^{\alpha+a}$$

$$A' \Big|_B^{\alpha-a}$$

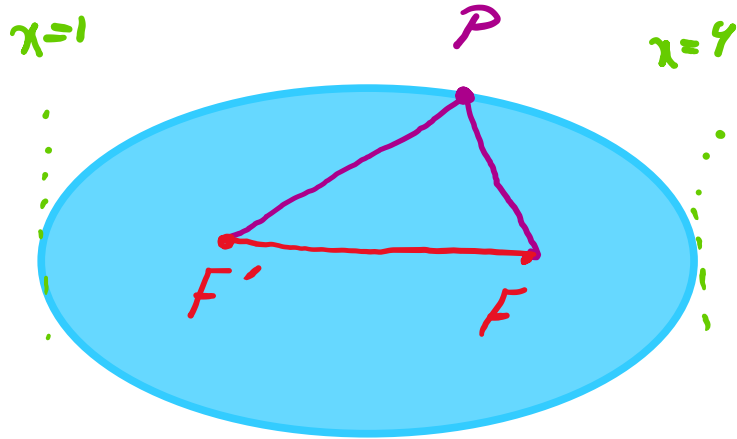
$$F \Big|_B^{\alpha+c}$$

$$F' \Big|_B^{\alpha-c}$$

$$B \Big|_{B+b}^{\alpha}$$

$$B' \Big|_{B-b}^{\alpha}$$

۲- چهار خط به معادله $x = 1$, $x = 6$, $y = -1$ و $y = 3$ بر یک بیضی به کانون‌های F و F' مماس هستند. اگر P نقطه‌ای واقع بر این بیضی باشد، به طوری که F و F' رأس‌های یک مثلث باشند، محیط این مثلث کدام است؟



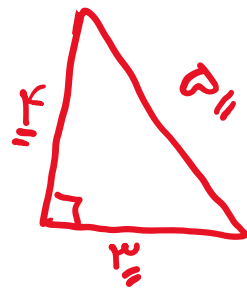
$$PF' + PF = 2a$$

$$\underline{P} = 2a + 2c = ?$$

$$\begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 4 \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{2c = 3}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

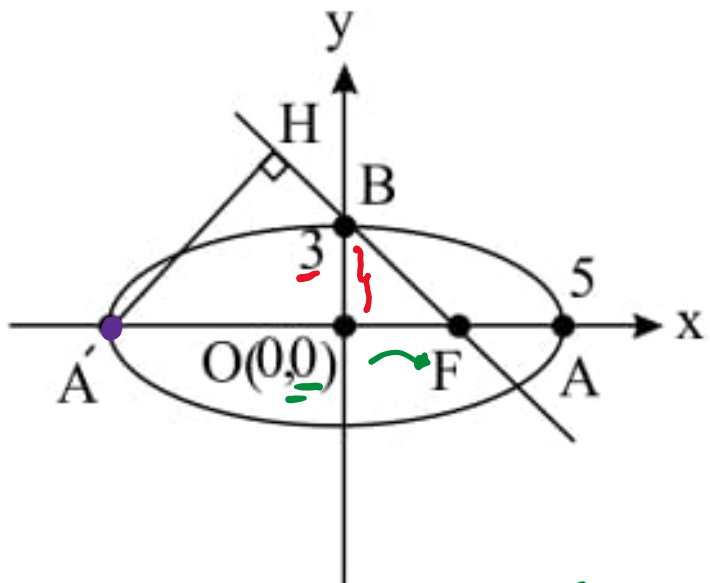
$$\rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



$$\underline{P} = 10 + 3 = 13$$



۳- در بیضی شکل زیر طول $A'H$ چه قدر است؟



$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 5 \end{cases} \rightarrow c = 4$$

$$\begin{cases} \text{خط: } 3x + 4y - 12 = 0 \\ A' \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$A'H = \frac{|-15 + 0 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{27}{5}$$

$$\begin{cases} F \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix} \\ B \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$m_{BF} = \frac{3 - 0}{0 - 4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{معادله خط: } y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4) \rightarrow 4y = -3x + 12$$



سایت خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com

۴- مجموع فواصل نقطه‌ی P روی بیضی از دو نقطه‌ی ثابت M و N به طول‌های ۳- و ۴ روی محور x ها برابر ۹ است. اندازه‌ی قطر کوچک این بیضی کدام است؟

$$F \Big|_0^4 \quad F' \Big|_0^{-3} \rightarrow FF' = 2c \rightarrow 2c = 7 \rightarrow c = \frac{7}{2} \quad \checkmark$$

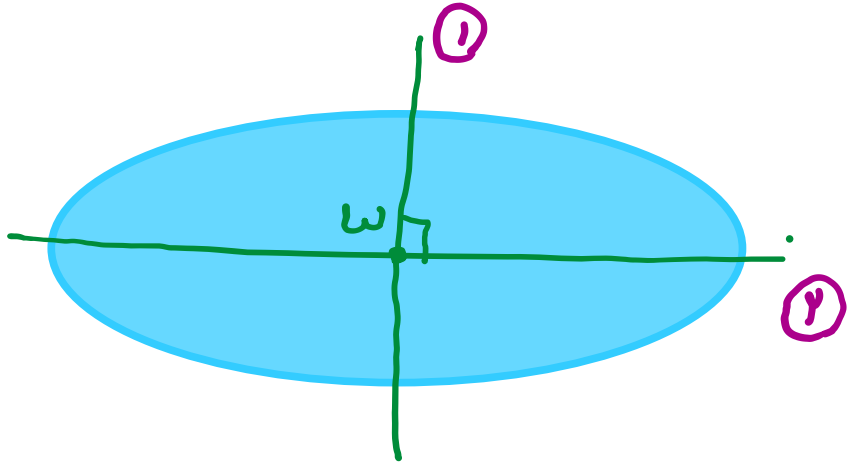
$$PF + PF' = 2a \rightarrow 2a = 9 \rightarrow a = \frac{9}{2} \quad \checkmark$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{32}{4}} = \sqrt{8}$$

$$\rightarrow \overline{BB'} = 2b = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$



۵- خط به معادله $x + 2y = 3$ یکی از قطرهای بیضی به مرکز $W \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ است. قطر دیگر این بیضی محور طول‌ها را با چه طولی قطع می‌کند؟



$$m_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow m_2 = +2$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$y + 1 = 2(x - 2)$$

با $y=0$ → $1 = 2x - 4 \rightarrow x = \frac{5}{2}$



۶- در یک بیضی با کانون‌های $F \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $F' \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$ که در آن طول قطر بزرگ برابر ۶ واحد است، کدام گزینه وضعیت قرارگیری نقطه $M \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ را به درستی نشان می‌دهد؟

① درون بیضی

② بیرون بیضی

③ روی بیضی

④ مرکز بیضی

$$MF = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$MF' = \sqrt{0+4} = 2$$

$$AA' = 2a = 6 \Rightarrow 2a = 6$$

$$MF + MF' = 2a \rightarrow \text{روی بیضی}$$

$$MF + MF' > 2a \rightarrow \text{خارج بیضی}$$

$$MF + MF' < 2a \rightarrow \text{داخل بیضی}$$

$$MF + MF' = \sqrt{10} + 2 < 6 = AA'$$



۷- در یک بیضی افقی با مرکز $W \begin{vmatrix} -4 \\ -1 \end{vmatrix}$ ، طول قطر کوچک و خروج از مرکز آن به ترتیب ۶ واحد و $\frac{4}{5}$ است. کدام نقطه زیر بر روی این بیضی قرار ندارد؟

$$\begin{vmatrix} -9 \\ -1 \end{vmatrix} \textcircled{۴}$$

$$\begin{vmatrix} -4 \\ ۲ \end{vmatrix} \textcircled{۳}$$

$$\begin{vmatrix} -4 \\ -4 \end{vmatrix} \textcircled{۲}$$

$$\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \textcircled{۱}$$

$$BB' = 6 = 2b \rightarrow b = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \rightarrow \frac{4}{5} = \sqrt{1 - \frac{9}{a^2}} \rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{9}{25} \rightarrow a = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \rightarrow c = 4$$

$$A' \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} -9 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$F \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$F \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} -4 \\ ۲ \end{vmatrix}$$

$$B' \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \end{vmatrix}$$



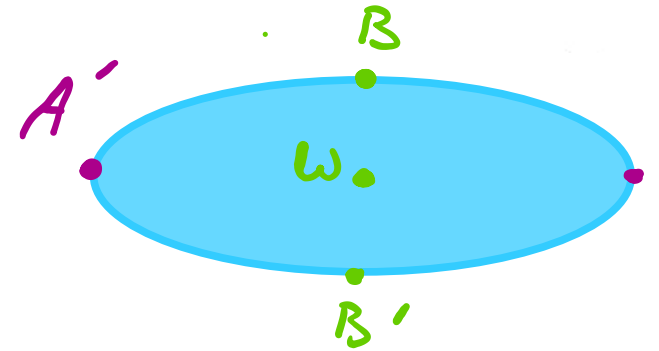
۸- مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}$ است. این بیضی از نقطه $\begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$ می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

$$B / \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad B' / \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$BB' = 2b = 2 \rightarrow b = 1$$

$$W / \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

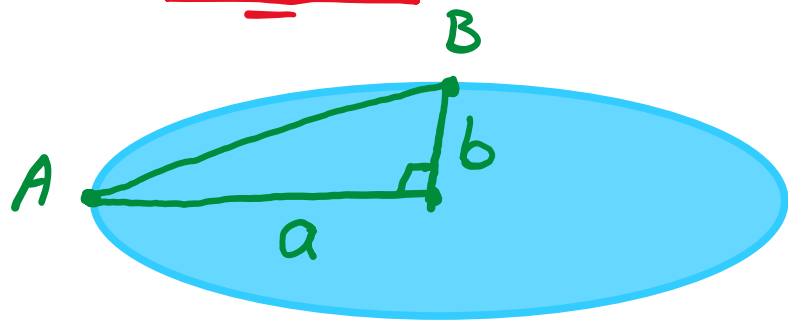
$$A' / \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix} \rightarrow a = 3$$



$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1\sqrt{1}}{3}$$



۹- در یک بیضی، فاصله یک رأس کانونی از یک رأس ناکانونی، نصف مجموع فاصله کانونی و اندازه قطر بزرگ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



$$e = \frac{c}{a} = ?$$

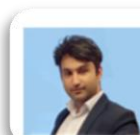
$$\sqrt{a'^2 + b'^2}$$

$$\sqrt{a'^2 + b'^2} = \frac{1}{r} (rc + ra) = a + c \rightarrow \cancel{a} + \underline{b'^2} = \cancel{a} + c'^2 + rac$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 \rightarrow b'^2 = a'^2 - c'^2 \rightarrow a'^2 - c'^2 = c'^2 + rac$$

$$\div a'^2 \rightarrow 1 - e'^2 = e'^2 + re \rightarrow re' + re - 1 = 0$$

$$\Delta = r^2 - r(r)(-1) = 1r^2 \rightarrow e = \frac{-r + r\sqrt{r}}{r} = \frac{\sqrt{r} - 1}{r}$$



$$(x-\alpha)^r + (y-\beta)^r = R^r \quad \begin{array}{l} 0 \\ \beta \end{array} \bigg| \alpha \quad \text{نقطه} = R$$

$$x^r + y^r + ax + by + c = 0$$

$$R^r = \frac{a^r + b^r - rc}{r}$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ -b/r \end{array} \bigg| -a/r$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ f_y' = 0 \end{array} \bigg| f_x' = 0$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ \beta \end{array} \bigg| \alpha$$

$$R^r = \alpha^r + \beta^r - c$$

$$\text{نقطه دایره:} \quad \begin{array}{l} \text{نقطه} = x^r = y^r \end{array} \quad \bigg| \text{نقطه}$$

$$\bigg| R > 0$$

۱۰ - شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(0, 0)$, $(-2, 4)$, $(2, 1)$ می‌گذرد کدام است؟

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$A / 0 \rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0 \quad \checkmark$$

$$B / -2 \rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \rightarrow -2a + 4b = -20 \quad \checkmark$$

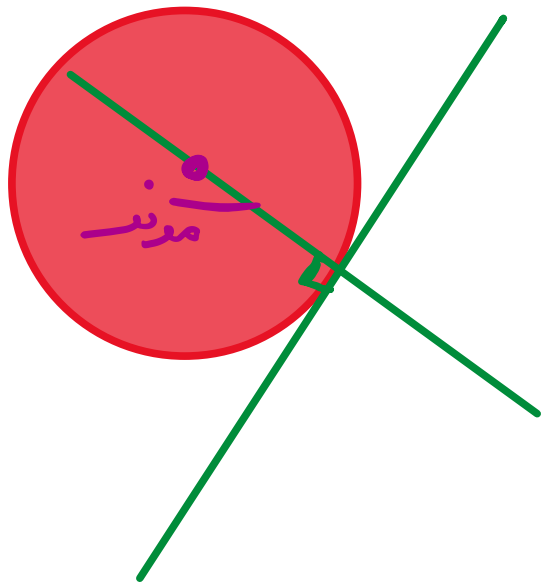
$$C / 2 \rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -5 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -5 \end{array}$$

$$R = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 25 - 0}{4} \rightarrow R = \frac{25}{4} = \frac{5}{2}$$



۱۱- به ازای کدام مقدار a ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله‌ی $3x + 2y = a$ در نقطه‌ی تلاقی آنها، 90° درجه است؟

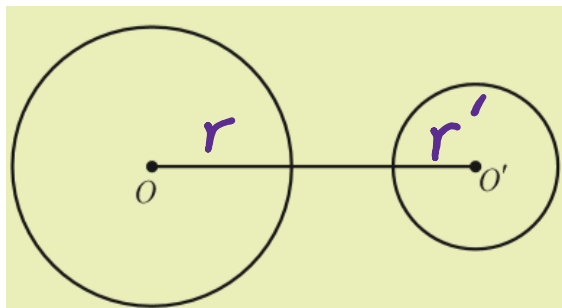


$$\omega \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = +1 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

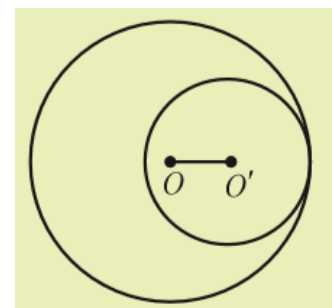
$$\begin{aligned} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{aligned} \rightarrow 3-1=a \rightarrow a=2$$



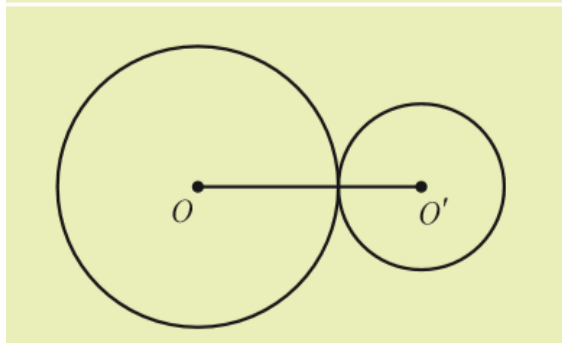
$$OO' = L$$



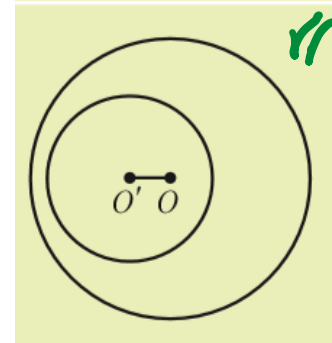
$$L > r + r'$$



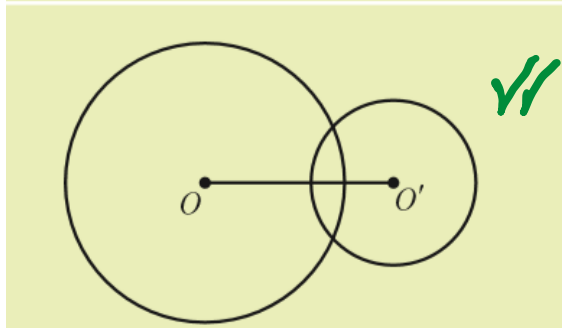
$$L = r - r' \quad (2)$$



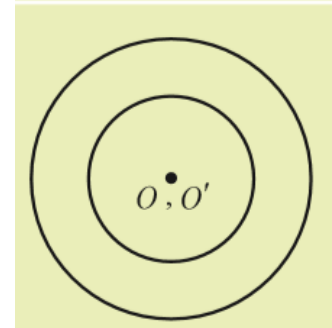
$$L = r + r' \quad (1)$$



$$L < r - r'$$



$$r - r' < L < r + r' \quad (3)$$



$$L = 0$$

۱۲- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{2} = 1 \\ \beta = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$R = \frac{4 + 36 + 32}{4} = 1 + 9 + 8 \rightarrow R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha' = -\frac{8}{2} = -4 \\ \beta = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$R' = \frac{64 + 16 - 48}{4} = 16 + 4 - 12 \rightarrow R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

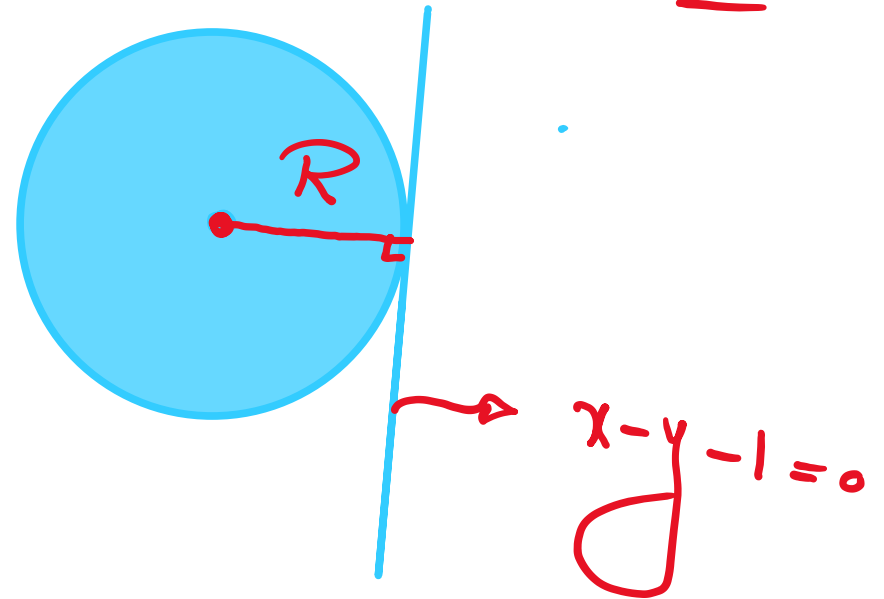
$$L = OO' = \sqrt{20 + 20} = 2\sqrt{10}$$

$$\rightarrow L = 2\sqrt{10} = R + R' = 5\sqrt{2} \quad \text{مساحت خارج}$$



۱۳- هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(-2, 1)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

$$\begin{matrix} 0 & / & -2 \\ & & 1 \end{matrix} \quad x - y - 1 = 0$$



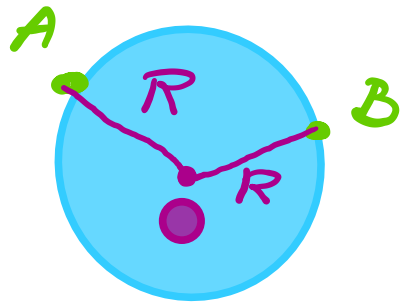
$$A/\beta \quad ax + by + c = 0$$

$$L = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$L = \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$



۱۴- دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟



$$\begin{array}{l} O / \alpha = x \\ \quad \beta = x - 2 \end{array}$$

$$R = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$OA = OB \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (x-3)^2}$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + (x-2)^2 = x^2 + (x-3)^2$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 \rightarrow x = 1$$

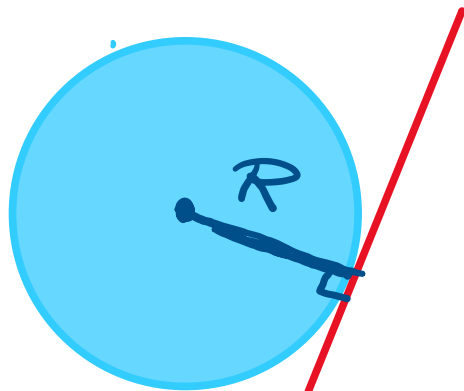


۱۵- به ازای کدام مقدار m خط $2x - 3y + m = 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ مماس است؟

خط مماس بر دایره:

فاصله مرکز تا خط برابر شعاع است.

$$\underline{\underline{R = L}}$$



$$\alpha = \frac{4}{2} = 2$$

$$\beta = \frac{-4}{2} = -2$$

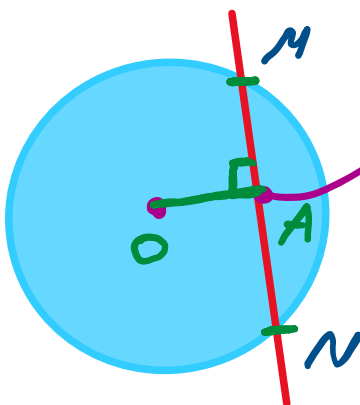
$$R^2 = 4 + 9 - 0 \rightarrow R = \sqrt{13}$$

$$2x - 3y + m - 2 = 0 \rightarrow L = \frac{|4 + 9 + m - 2|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|11 + m|}{\sqrt{13}}$$

$$|11 + m| = 13 \rightarrow \begin{cases} m + 11 = 13 \rightarrow m = 2 \\ m + 11 = -13 \rightarrow m = -24 \end{cases}$$



۱۶- معادله‌ی کوتاه‌ترین وتر از دایره $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ که از نقطه $(-1, 1)$ می‌گذرد کدام است؟



$\alpha = \frac{-f}{r} = -2$
 $\beta = \frac{-r}{r} = -1$
 $\alpha = \frac{-f}{r} = -2$
 $\beta = \frac{-r}{r} = -1$
 $m_{OA} = \frac{1 - (-1)}{-1 - (-2)} = \frac{2}{1} = 2$

$MN \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \\ m = \frac{-1}{2} \end{cases}$

$y - 1 = \frac{-1}{2}(x + 1)$

$x^2 \rightarrow 2y - 1 = -x - 1 \rightarrow 2y + x = 0$



آموزش ریاضی

هندسه

(بخش دوم – هندسه پایه)

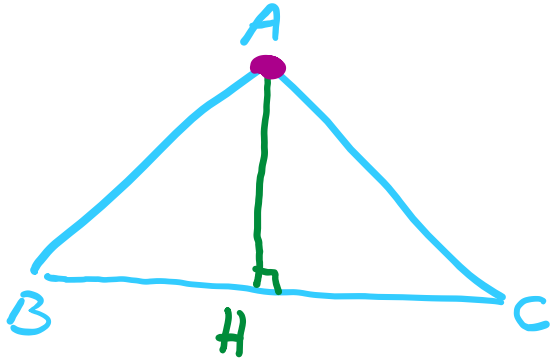
علی هاشمی

$$A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix} \rightarrow |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$M : \begin{cases} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow L_A = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۷- سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$, $AC: y - 2x = 5$, $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH



$$\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{3} \\ y_0 = \frac{1}{3} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \times 9 &\rightarrow 9y - 3x = 17 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m_{BC} = -\frac{2}{3} \rightarrow m_{AH} = \frac{2}{3}$$



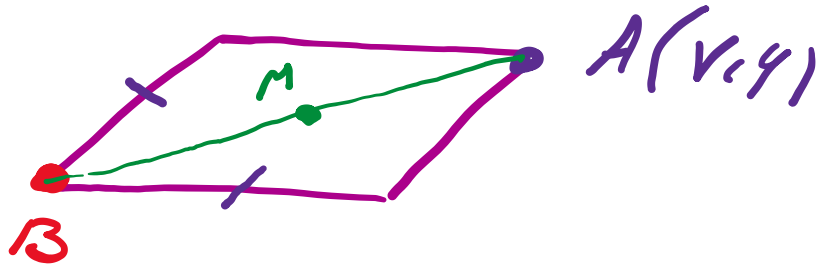
۱۸- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

$$\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \rightarrow L = \frac{|3+2|}{\sqrt{4+4}}$$

$$\rightarrow L = \frac{5}{2\sqrt{2}} \rightarrow S = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{4}$$



۱۹- نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟



$$\rightarrow \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow M(3, 5)$$

$$A \begin{matrix} 7 \\ 6 \end{matrix} \quad B \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} \rightarrow M \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}$$

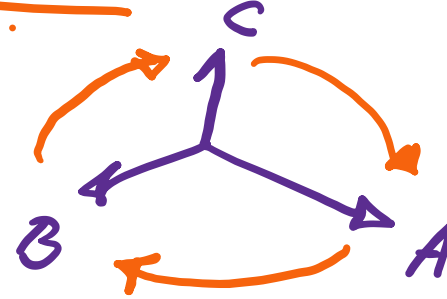


۲۰- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲, ۵)$ ، $B(۳, ۰)$ و $C(۰, ۲)$ کدام است؟

$$A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$$

$$C \begin{vmatrix} x_C \\ y_C \end{vmatrix}$$



$$S = \frac{1}{2} \left| x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B) \right|$$

$$S = \frac{1}{2} \left| ۲(۰ - ۲) + ۳(۲ - ۵) + ۰(۵ - ۰) \right| = \frac{۹}{۲}$$

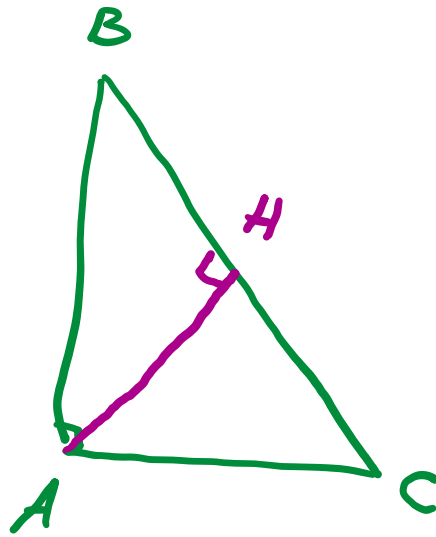


۲۱- در مثلث با رئوس $A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$ اندازه ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع کدام است؟

$$AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$



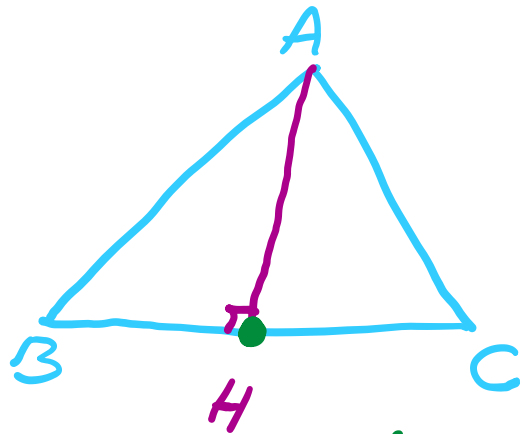
$$\underline{\underline{BC}}^r = \underline{\underline{AB}}^r + \underline{\underline{AC}}^r$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{r}} \cdot AB \cdot AC = \cancel{\frac{1}{r}} \cdot AH \cdot BC$$

$$\rightarrow \sqrt{10} \times \sqrt{10} = AH \cdot \sqrt{20} \rightarrow AH = \sqrt{5}$$



۲۲- اگر نقاط $A(2, 1)$ و $B(0, -1)$ و $C(4, -4)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC



$$m_{BC} = \frac{-4+1}{4-0} = \frac{-3}{4} \rightarrow m_{AH} = \frac{4}{3}$$

$$AH \rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$y-1 = \frac{4}{3}(x-2) \xrightarrow{\times 3} 3y-3 = 4x-8$$

$$\rightarrow 3y-4x = -5 \quad (1)$$

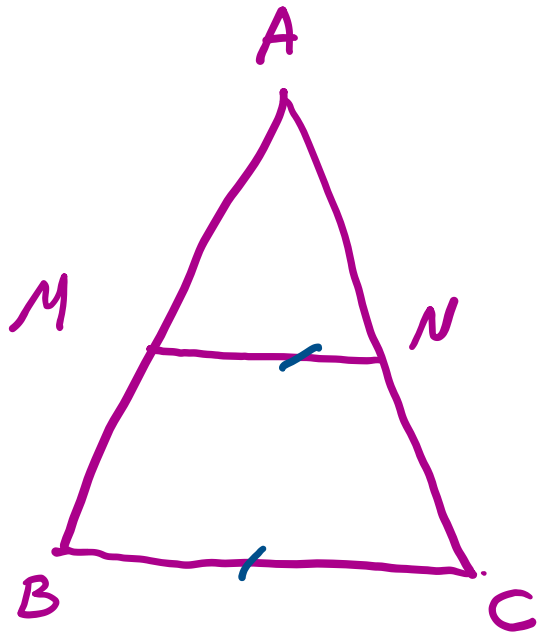
$$BC \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -1 \\ m = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

$$y+1 = \frac{-3}{4}(x-0) \xrightarrow{\times 4} 4y+4 = -3x$$

$$\rightarrow 4y+3x = -4 \quad (2)$$

$$H \begin{cases} 1/25 \\ -31/25 \end{cases}$$





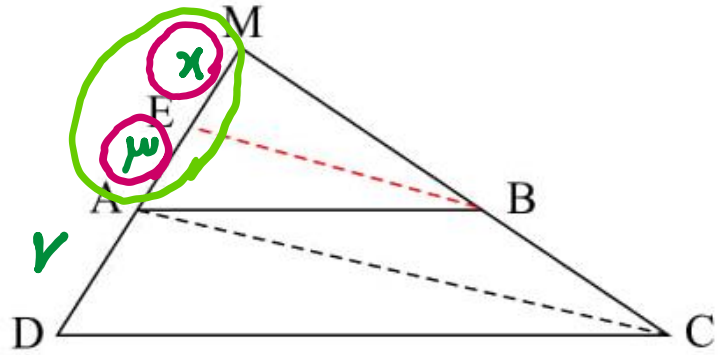
كوايه

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

لبنه

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

۲۳- در ذوزنقه ی $ABCD$ ، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصله ی MD کدام است؟



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{MB}{BC} \\ \frac{ME}{EA} = \frac{MB}{BC} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{MB}{BC} \end{array} \right.$$

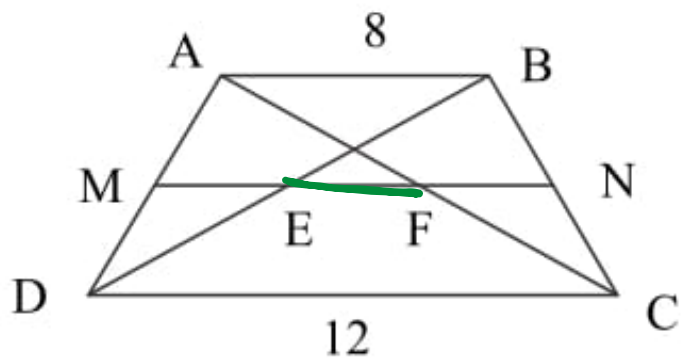
$$\rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{x}{3} \rightarrow 3x = 7x + 9$$

$$\rightarrow x = \frac{9}{4} = ۲ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{x}{3} = \frac{x+3}{7}}$$



۲۴- در شکل زیر، $ABCD$ دوزنقه و M و N وسط دو ساق است. طول EF کدام است؟



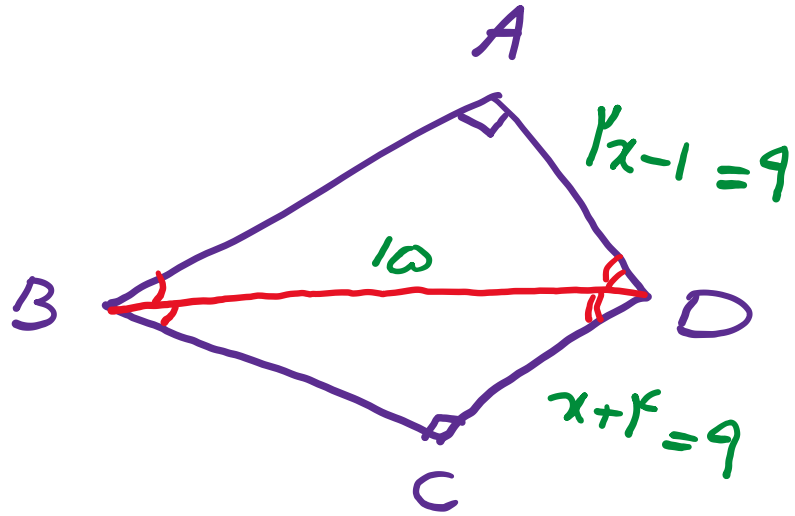
$$\frac{AM}{AD} = \frac{MF}{DC} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{MF}{12} \rightarrow MF = 6$$

$$\frac{DM}{DA} = \frac{ME}{AB} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ME}{8} \rightarrow ME = 4$$

$$EF = MF - ME = 6 - 4 = 2$$



۲۵- در چهارضلعی $ABCD$ ، $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ و قطر BD نیم‌ساز زاویه‌های B و D است. اگر $BD = 15$ ، $AD = 2x - 1$ و $DC = x + 4$ باشد، محیط چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



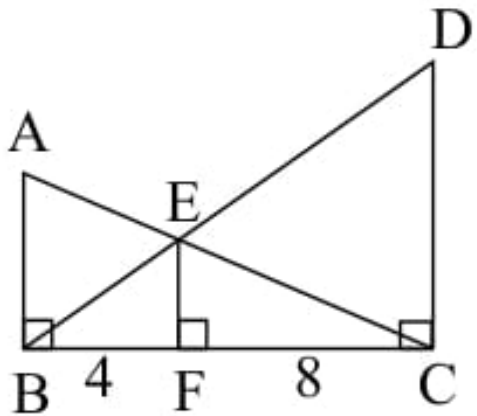
$$2x - 1 = x + 4 \rightarrow x = 5$$

$$\rightarrow BD^2 = AD^2 + AB^2 \rightarrow 225 = 81 + AB^2 \rightarrow AB = 12$$

$$P = \underbrace{AB}_{12} + \underbrace{BC}_{12} + \underbrace{AD}_9 + \underbrace{DC}_9 = 42$$



۲۶- در شکل زیر نسبت AB به CD کدام است؟



$$\frac{AB}{CD} = ? \rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$$

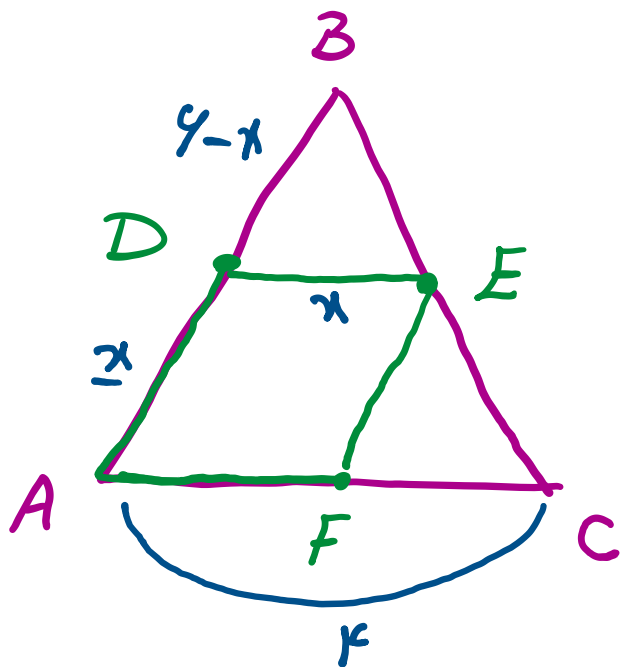
$$\frac{FC}{BC} = \frac{FE}{AB} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EF}{AB} \rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{DC} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{EF}{DC} \rightarrow \frac{EF}{DC} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{EF}{AB}}{\frac{EF}{DC}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{2}{1}$$



۲۷- در مثلث ABC به اضلاع $AB=6$ و $AC=4$ و $BC=4$ نقاط D و E و F را به ترتیب بر AB و BC و AC انتخاب کرده‌ایم. اگر چهارضلعی $ADEF$ لوزی باشد، طول AD کدام است؟



$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$$

$$\rightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{4}$$

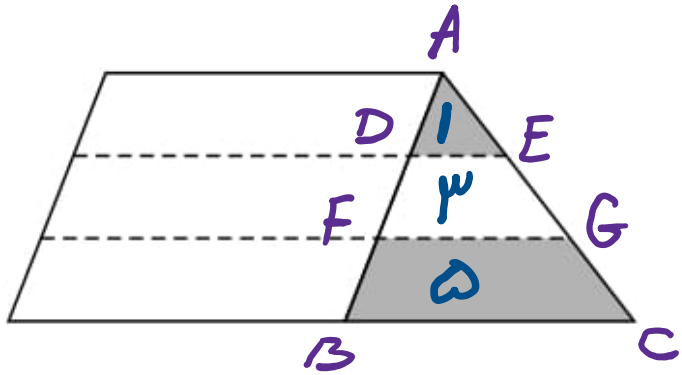
$$\rightarrow 14 - 1x = 1.5x$$

$$\rightarrow 10x = 14$$

$$\rightarrow x = 1.4$$



۲۸- یک ساق دوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه سایه زده، کدام است؟



$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot DE}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot (FG + BC)} = \frac{DE}{FG + BC} = ?$$

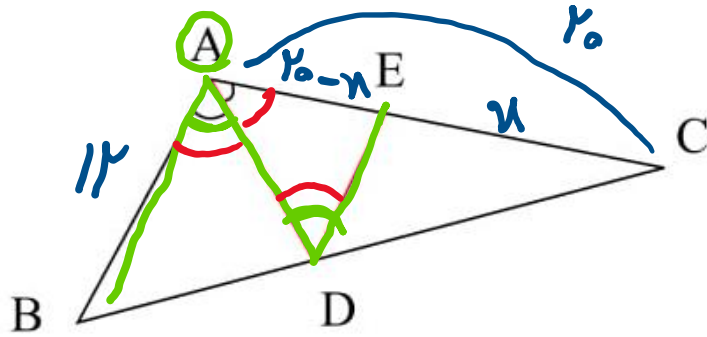
$$\frac{AE}{AG} = \frac{DE}{FG} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DE}{FG} \rightarrow FG = 2K$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DE}{BC} \rightarrow BC = 3K$$

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{K}{2K + 3K} = \frac{1}{5}$$



۲۹- در شکل مقابل $\angle AB = 3\angle AC = 60^\circ$ و AD نیمساز زاویه ی A است. $DE \parallel AB$ ، اندازه ی EC کدام است؟



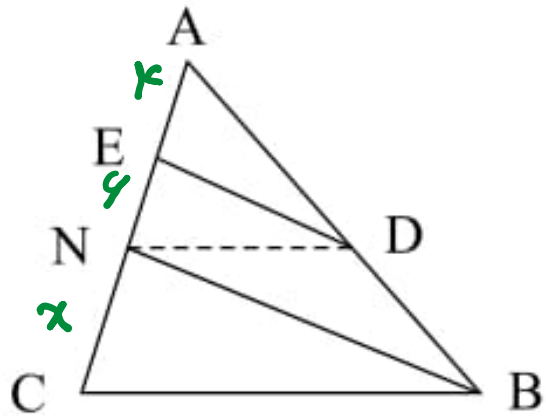
$$\frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB}$$

$$\rightarrow DE = EA \quad \text{زاویه های مساوی} \quad EAD$$

$$\rightarrow \frac{x}{60} = \frac{60-x}{120} \rightarrow x = 40$$



۳۰- در شکل مقابل $DN \parallel BC$ و $DE \parallel BN$ و $AE = ۴$ و $EN = ۶$ ، اندازه‌ی AC کدام است؟



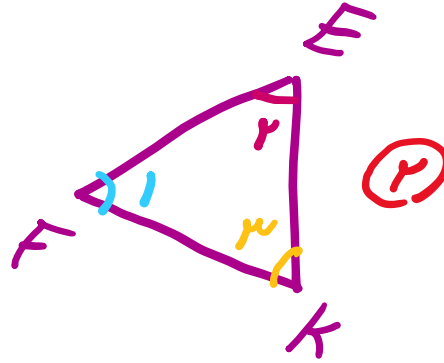
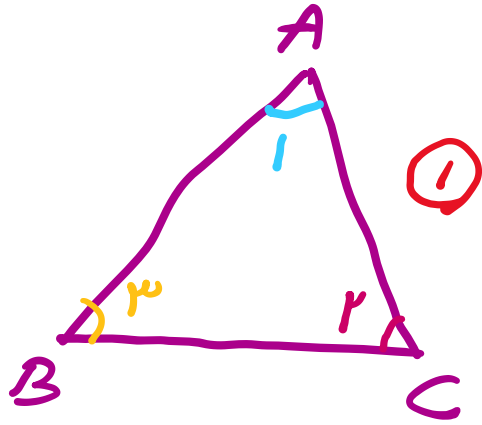
$$\frac{AN}{NC} = \frac{AD}{DB} \rightarrow \frac{10}{x} = \frac{AD}{DB}$$

$$\frac{AE}{EN} = \frac{AD}{DB} \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{AD}{DB}$$

$$\rightarrow \frac{10}{x} = \frac{4}{6} \rightarrow 4x = 60 \rightarrow x = 15 \quad \checkmark$$

$$AC = 4 + 6 + 15 = 25$$

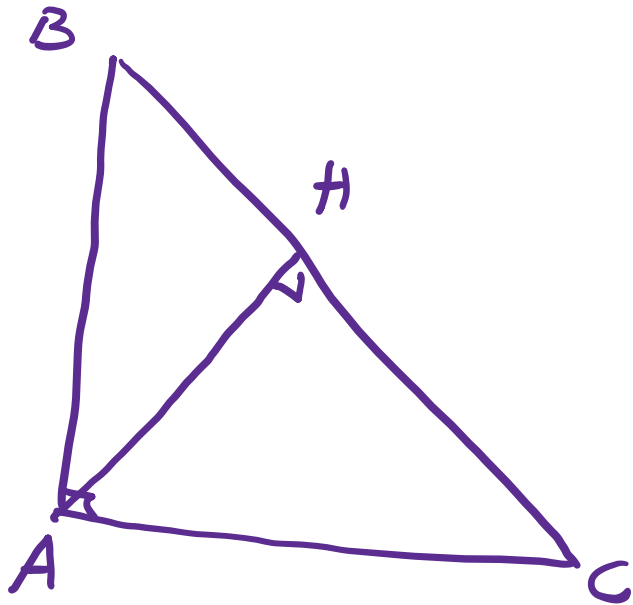




$$K = \frac{BC}{EK} = \frac{AB}{FK} = \frac{AC}{EF}$$

$$\frac{P_i}{P_r} = K$$

$$\frac{S_i}{S_r} = K^r$$



$$1) BC^2 = AB^2 + AC^2$$

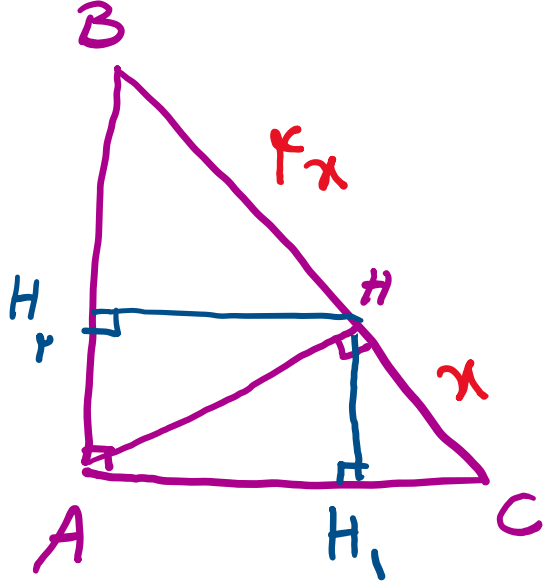
$$2) AH^2 = BH \cdot CH$$

$$3) AB^2 = BH \cdot BC$$

$$4) AC^2 = CH \cdot BC$$

$$5) AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

۳۱- در یک مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچکتر $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟



$$\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{\frac{1}{r} \cdot AH \cdot HC}{\frac{1}{r} \cdot AH \cdot BC} = \frac{HC}{BC} = \frac{1}{5}$$

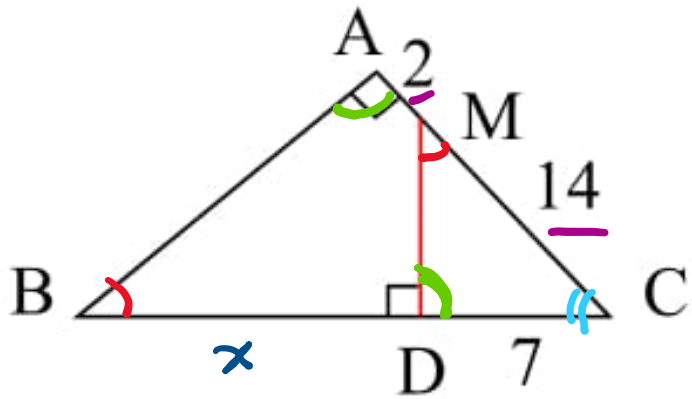
$$\frac{S_{AHC}}{S_{ABH}} = \frac{\frac{1}{r} \cdot AH \cdot HC}{\frac{1}{r} \cdot AH \cdot HB} = \frac{x}{r_x} = \frac{1}{r} = k^r \rightarrow k = \frac{1}{r}$$

$$\frac{H_1 H}{H_r H} = ?$$

$$\frac{H_1 \cdot H}{H_r \cdot H} = k = \frac{1}{r}$$



۳۲- در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟



$$\rightarrow \frac{AB}{MD} = \frac{BC}{MC} = \frac{AC}{DC}$$

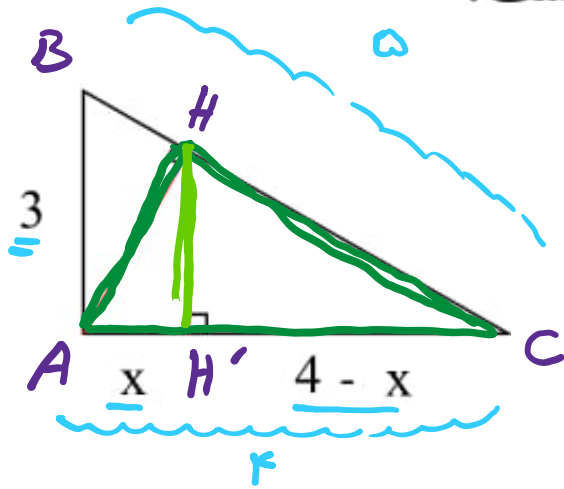
$$\rightarrow \frac{AB}{MD} = \frac{x+7}{14} = \frac{14}{7}$$

$$x+7 = 14$$

$$x = 7$$



۳۳- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟



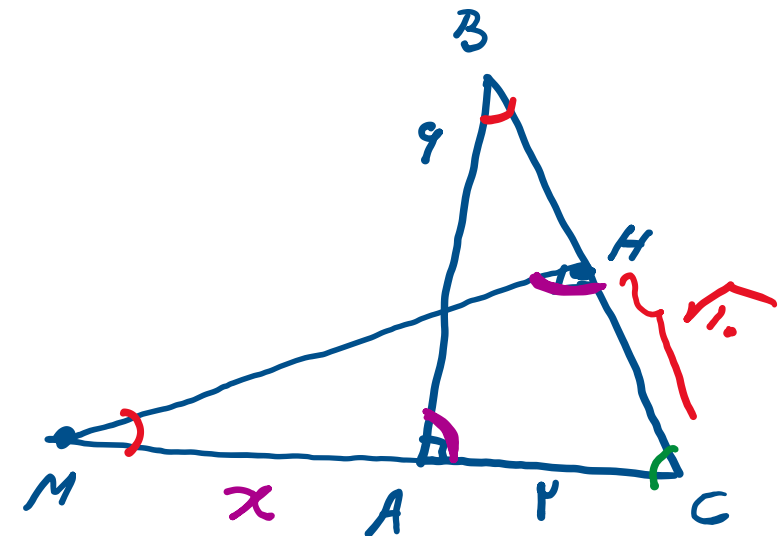
$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \rightarrow AH = 4 \times 3 \rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\rightarrow AH' = AH' \cdot AC \rightarrow \frac{144}{100} = x \cdot 4 \rightarrow x = \frac{144}{100}$$

$$\rightarrow x = 1.44$$



۳۴- اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است. عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از نزدیکترین راس این مثلث چند واحد است؟



$$\frac{BC}{MC} = \frac{AB}{HM} = \frac{AC}{HC}$$

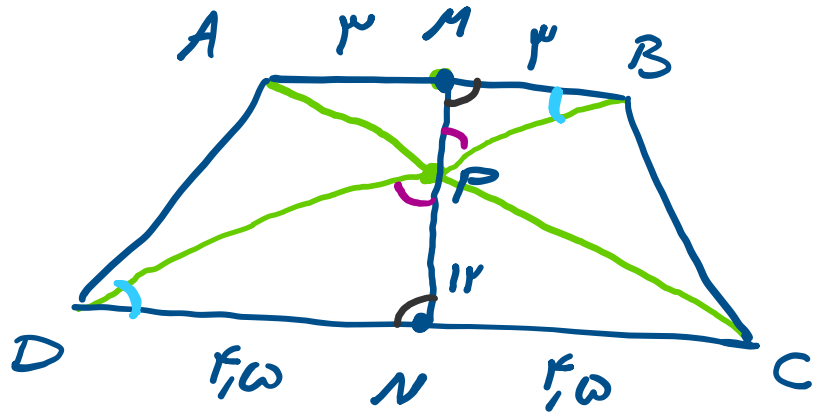
$$\frac{2\sqrt{10}}{x+2} = \frac{6}{HM} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\rightarrow \frac{2\sqrt{10}}{x+2} = \frac{2}{\sqrt{10}} \rightarrow x+2=10 \rightarrow x=8$$



۳۵- اندازه‌ی قاعده‌های یک دوزنقه ۶ و ۹ واحد و طول پاره‌خطی که دو نقطه وسط قاعده‌ها را به هم وصل کند برابر ۱۲ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو قطر این دوزنقه از وسط قاعده‌ی کوچکتر چقدر است؟



$$\leadsto MP = ?$$

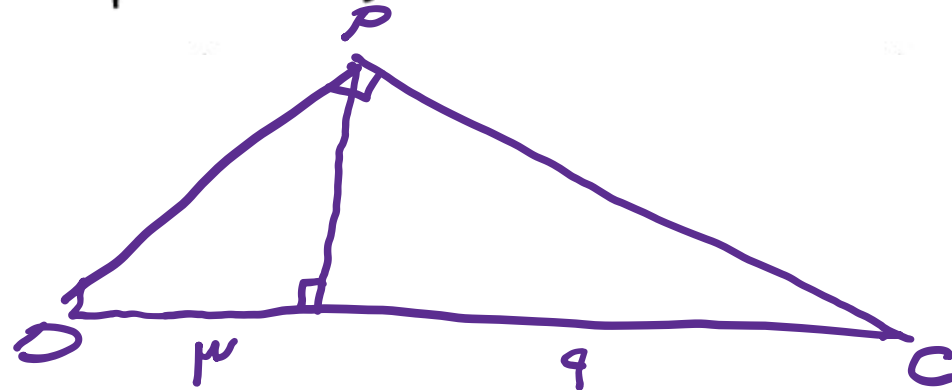
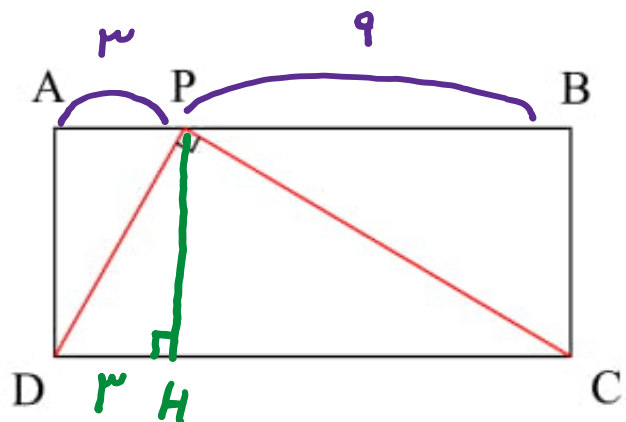
$$MP = x \leadsto PN = 12 - x$$

$$PMB \simeq PDN \leadsto \frac{BM}{DN} = \frac{MP}{PN} \leadsto \frac{3}{4.5} = \frac{x}{12 - x}$$

$$\leadsto 34 - 1x = 4.5x \leadsto 4.5x = 34 \quad \& \quad x = 7.5$$



۳۶- در مستطیل شکل مقابل $\hat{P} = 90^\circ$ ، $AP = BP = 9$. طول DP کدام است؟

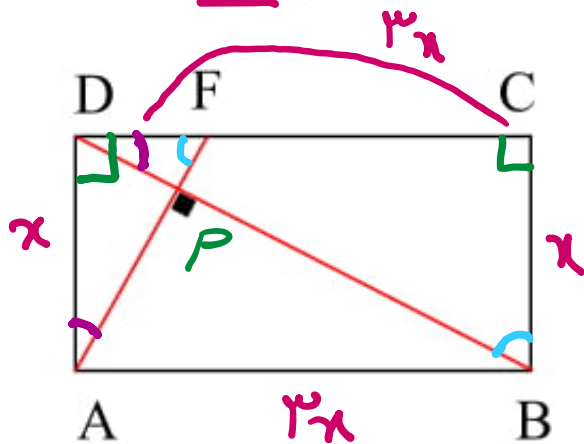


$$\rightarrow DP^2 = DK \cdot DC$$

$$DP^2 = 3 \times 12 = 36 \rightarrow DP = 6$$



۳۷- در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. F نقطه‌ای است روی ضلع DC به طوری که $AF \perp BD$. اگر $AB = ۳AD$ باشد، DC چند برابر DF است؟



$$\triangle ADF \sim \triangle DCB$$

$$\rightarrow \frac{AF}{DB} = \frac{DA}{DC} = \frac{DF}{CB}$$

$$\rightarrow \frac{AF}{DB} = \frac{x}{3x} = \frac{DF}{x} \rightarrow DF = \frac{1}{3}x$$

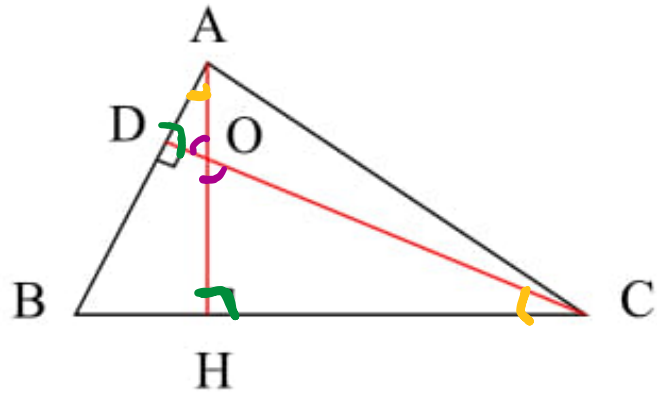
$$\rightarrow \frac{DC}{DF} = \frac{3x}{\frac{1}{3}x} = 9$$

$$\begin{cases} \triangle ADF: A + 90 + F = 180 \\ \triangle DFP: D + 90 + F = 180 \end{cases} \rightarrow A = D$$

$$DC = k \cdot DF$$



۳۸- در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $\frac{1}{3}OH = AD = DO$ ، طول HC کدام است؟



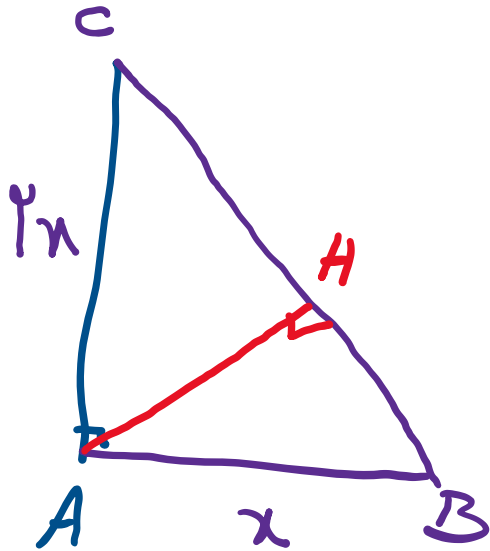
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OH} = \frac{AD}{HC}$$

$$\rightarrow \frac{OA}{OC} = \left[\frac{1,5}{34} = \frac{12}{x} \right]$$

$$\rightarrow 1,5 x = 12 \times 34 \rightarrow x = \frac{12 \times 34}{1,5} = 110$$



۳۹- در مثلث قائم الزاویه $(\hat{A} = \frac{\pi}{2}) ABC$ اگر $AC = 2AB$ ، ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = k$$

$$= k$$

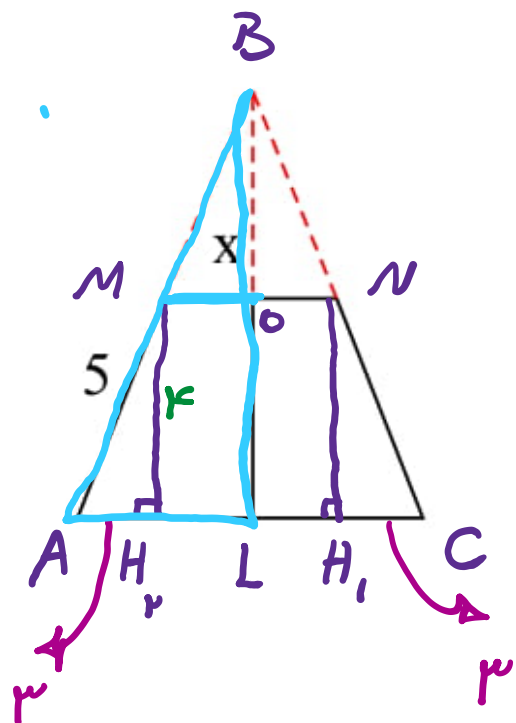
$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = x\sqrt{5}$$

$$k = \frac{BC}{AB} = \frac{x\sqrt{5}}{x} = \sqrt{5}$$



۴۰- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این دوزنقه از قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟



$$AC = 15 \quad MN = 9$$

$$\rightarrow AC - MN = 15 - 9 = 6$$

$$MH_r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\frac{BO}{BL} = \frac{OM}{LA} \rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{5}{15} \rightarrow x = y$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math